LOGIKA

Dwuargumentowe funktory logiczne: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Jednoargumentowe funktory: $\sim$

q	$\sim$
0	1
1	0

- Ile jest wszystkich funktorów logicznych: dwuargumentowych (2^4), jednoargumentowych (2^2).

Prawa de Morgana

I. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

II. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

Dowód niewprost

$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$

Prawa rozdzielności

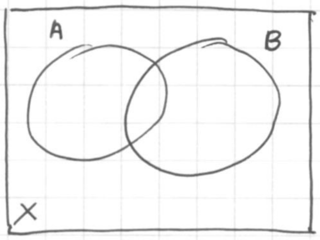
- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Inne tautologie

- $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$

Kwantyfikatory: $\forall$ (dla każdego), $\exists$ (istnieje), $\exists!$

TEORIA ZBIORÓW



Suma zbiorów $A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$

Różnica zbiorów $A \setminus B := \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$

Część wspólna $A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$

Dopełnienie $A' := \{x \in X : x \notin A\}$

Prawa de Morgana

I. $(A \cup B)' \iff A' \cap B'$

II $(A \cap B)' \iff A' \cup B'$

Reguła włączeń i wyłączeń

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

ALGEBRA I TEORIA LICZB

Kongruencje $a \equiv_m b \iff m \mid (a-b)$

Własności kongruencji:

- $a \equiv_m b \wedge c \equiv_m d \implies a+c \equiv_m b+d$
  $\implies a \cdot c \equiv_m b \cdot d$
- $a \equiv_m b \implies a^k \equiv_m b^k \quad (k \in \mathbb{N})$
- $a \equiv_m b \wedge n \perp m \implies \frac{a}{n} \equiv_m \frac{b}{n}$

Algorytm Euklidesa

Jeśli $a > b$ to $NWD(a,b) = NWD(a \bmod b, b) = \ldots$

Cechy podzielności

- 3 : $3 \mid$ suma cyfr
- 9 : $9 \mid$ suma cyfr
- 5 : ost. cyfra $5 \vee 0$
- 2 : ost. cyfra podzielna przez 2
- 8 : trzy ost. cyfry podzielne przez 8

Funkcja φ Eulera

Def. $\varphi(n)$ to funkcja przypisująca każdej liczbie $n \in \mathbb{N}$ liczbę liczb względnie pierwszych z n niewiększych od n.

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2$$

Własności funkcji φ

- Jeśli $m \perp n$ to $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$
- Jeśli $p \in \mathbb{P}$ to $\varphi(p) = p - 1$ i $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$
- Niech $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ gdzie $p_i \in \mathbb{P}$ wówczas

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Tw. Eulera

Jeśli $a \perp n$ to $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Małe Tw. Fermata (MTF)

Jeśli $p \in \mathbb{P}$ to $a^p \equiv a \pmod{p}$

Wzory skróconego mnożenia

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- Rozwinięcie dwumianu Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{(symbol Newtona)}$$

- $\frac{a}{b} = k \wedge \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = k$

- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$

Tożsamość Diofantosa

$$(xa^2+yb^2)(xc^2+yd^2) = (xac \pm ybd)^2 + xy(ad \mp bc)^2$$

Nierówności

- Nesbitta $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$ $\quad a,b,c \in \mathbb{R}_+$

- Cauchy'ego między średnimi

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

przy czym zakładamy, że $\forall_i\ a_i > 0$. Równość zachodzi tylko wtedy gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

- Cauchy'ego – Schwarza w postaci Engela

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \geqslant \frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{x_1+\ldots+x_n} \qquad x_i > 0$$

- Cauchy'ego – Schwarza

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2$$

Równość zachodzi tylko gdy $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$

Równania i nierówności z $|\cdot|$

- $|f(x)| \geqslant k \iff f(x) \geqslant k \ \vee\ f(x) \leqslant -k$
- $|f(x)| \leqslant k \iff f(x) \leqslant k \ \wedge\ f(x) \geqslant -k$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x) \ \vee\ f(x) = -g(x)$

Metoda wyznaczników

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Wyznacznik główny W def. jako $W := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Analogicznie def. $W_x := \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ i $W_y := \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

- Jeśli $W \neq 0$ wtedy ze wzorów Cramera rozw. jest
  $x = \frac{W_x}{W}$, $y = \frac{W_y}{W}$
- Jeśli $W = 0 \wedge W_x = 0 \wedge W_y = 0$ wtedy układ jest nieoznaczony i ma ∞-wiele rozwiązań
- Jeśli $W = 0 \wedge (W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0)$ to układ jest sprzeczny.

Funkcja kwadratowa

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (trójmian kwadratowy)

Rozwiązaniami $ax^2 + bx + c = 0$ są

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ jeśli $\Delta := b^2 - 4ac \geqslant 0$

- Postać iloczynowa $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Postać kanoniczna $f(x) = a(x - p)^2 + q$
  $p = x_w = \frac{-b}{2a}$, $q = f(x_w) = \frac{-\Delta}{4a}$
- Wzory Viete'a $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Wielomiany

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,, \qquad a_n \neq 0$$

a_i — współczynniki wielomianu

Równość dwóch wielomianów

$W_1(x) = W_2(x) \iff \deg\{W_1\} = \deg\{W_2\}$ i odpowiednie współczynniki są równe

- $W(x) = 0$ — $\deg\{W\} = $ brak (tzw. wielomian zerowy)
- $W(x) = a_0$ — $\deg\{W\} = 0$
- $W(x) = 7x^3 + 8x + 2$ — $\deg\{W\} = 3$

Wielomian zerowy to wielomian, którego wszystkie współczynniki są równe 0.

- $\deg\{W_1 \cdot W_2\} = \deg\{W_1\} + \deg\{W_2\}$

Tw. o dzieleniu wielomianu z resztą

Dla dowolnej pary wielomianów W i D istnieje para wielomianów I i R taka, że

$$W(x) = D(x) \cdot I(x) + R(x)$$

i $\deg\{R\} < \deg\{D\}$ lub $R(x)$ jest wielomianem 0.

Algorytm dzielenia wielomianów

$$\begin{array}{l}
\quad 5x^2 - 7x + 29 \\
\hline
\quad 5x^4 + 3x^3 + 2x \;:\; x^2 + 2x - 3 \\
-5x^4 - 10x^3 + 15x^2 \\
\hline
\qquad -7x^3 + 15x^2 + 2x \\
\qquad +7x^3 + 14x^2 - 21x \\
\hline
\qquad\quad 29x^2 - 19x \\
\qquad\quad -29x^2 - 58x + 87
\end{array}$$

zatem

$$5x^4 + 3x^3 + 2x = (5x^2 - 7x + 29)(x^2 + 2x - 3) + (87 - 77x)$$

Zauważmy, że znając $D(x)$ i $W(x)$ jeśli tylko znamy pierwiastki wielomianu $D(x)$ możemy znaleźć $R(x)$

$$W(x_0) = I(x_0)\cdot D(x_0) + R(x_0) = R(x_0)$$

Schemat Hornera

$$5x^3 - 7x - 26 : (x-2)$$

	5	0	-7	-26
2	5	10	13	0

$\cdot \quad +0$

$\cdot \quad -7$

Pierwszy współczynnik (5) przepisujemy

Tw. o pierwiastkach wymiernych

Niech $W(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeśli $\frac{p}{q}$, gdzie $q \neq 0$ i $p \perp q$ jest pierwiastkiem $W(x)$ to $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Tw. Bezout'a

$a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W \iff (x-a) \mid W$

Pierwiastki k-krotne

$a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu W

$\iff \quad (x-a)^k \mid W \ \wedge \ (x-a)^{k+1} \nmid W$

Zasadnicze Tw. Algebry (ZTA)

Każdy wielomian stopnia co najmniej 1 można rozłożyć na iloczyn czynników liniowych $ax+b$ lub kwadratowych $\alpha x^2 + \beta + \gamma$ $(\Delta < 0)$.

Wzory Viete'a dla wielomianu 3-go stopnia

$$W(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

<u>Funkcja wymierna</u>

$f(x) = \dfrac{W(x)}{P(x)}$, gdzie W, P to wielomiany

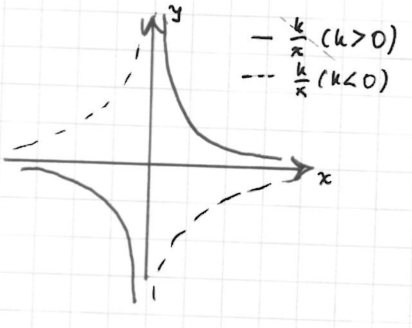
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \neq 0\}$

<u>Nierówności wymierne</u>

$$\frac{W_1}{W_2} \gtrless 0 \iff W_1 \cdot W_2 \gtrless 0 \ \wedge \ x \in \{x \in \mathbb{R} : W_2(x) \neq 0\}$$

<u>Funkcja homograficzna</u>

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $c \neq 0$, $a \cdot d \neq b \cdot c$



$f(x) = \dfrac{k}{x-p} + q$, $[p, q] = [-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}]$

<u>Indukcja matematyczna</u>

Zas. indukcji matematycznej: Niech T oznacza tw. dotyczące <u>liczb naturalnych</u>. Jeśli:

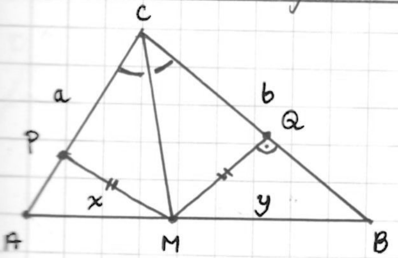
1) $T(n_0)$ jest prawdziwe dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$

2) Prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

wówczas z zas. indukcji matematycznej T jest prawdziwe dla wszystkich $n \geq n_0$.

PLANIMETRIA

- **Tw. o dwusiecznej kąta wewnętrznego w Δ**

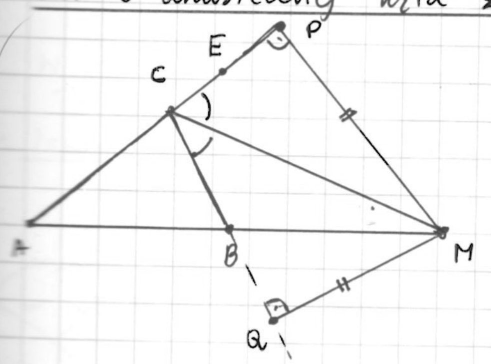


CM jest dwusieczną $\measuredangle ACB \iff$

$\iff a \cdot y = b \cdot x$

$$\frac{[BMC]}{[AMC]} = \frac{y}{x} = \frac{b \cdot MQ}{a \cdot MP}$$

- **Tw. o dwusiecznej kąta zewnętrznego w Δ**

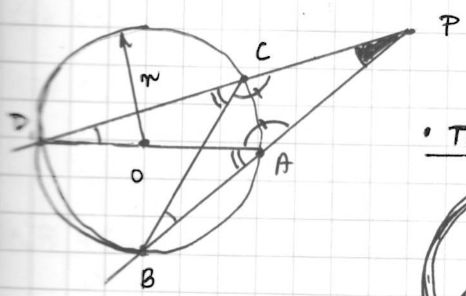


$$\frac{[AMC]}{[BMC]} = \frac{AM}{BM} = \frac{AC \cdot MP}{BC \cdot MQ}$$

CM jest dwusieczną $\measuredangle BCE \iff$

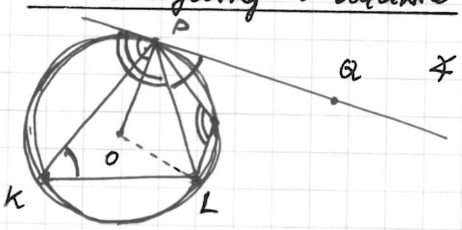
$\iff AM \cdot BC = BM \cdot AC$

- **Potęga punktu wzgl. okręgu**



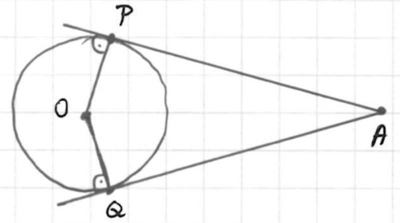
$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = |PO|^2 - r^2$$

- **Tw. o stycznej i cięciwie**



$\measuredangle QPL = \measuredangle PKL$

- Najmocniejsze tw. geometrii

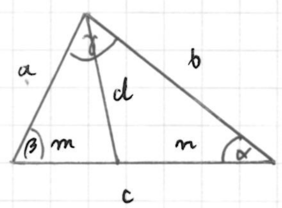


$$|AP| = |AQ|$$

- Wzory na pole Δ

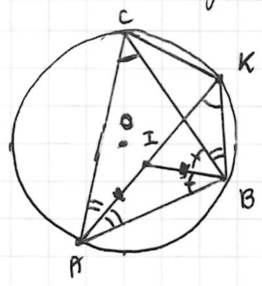
$$[ABC] = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = rp = \frac{abc}{4R} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p := \frac{a+b+c}{2}$$

- Twierdzenie Stewarta



$$a^2 n + b^2 m = d^2 c + mnc$$

- Tw. cosinusów $\quad a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$
- Tw. sinusów $\quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- Tw. o trójliściu



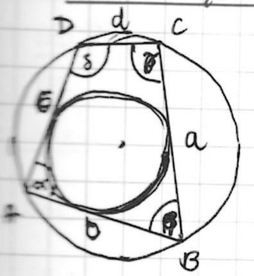
I – środek okręgu wpisanego w ΔABC

$$|CK| = |IK| = |BK|$$

- Tw. Eulera $\quad |OI|^2 = R^2 - 2Rr$
- Tw. Ptolemeusza

czworokąt ABCD wpisany w okrąg $\iff$ $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

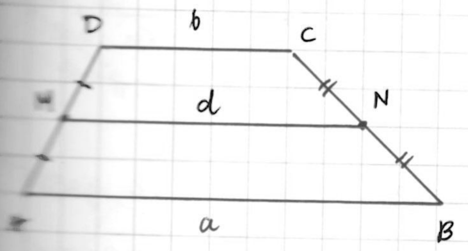
- Czworokąt wpisany i opisany



ABCD wpisany $\iff \alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$

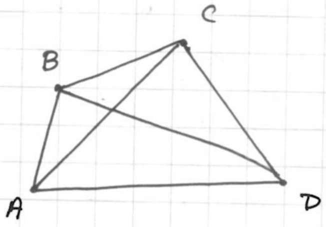
ABCD opisany $\iff a + b = c + d$

- Tw. o odcinku łączącym środki ramion trapezu



$MN \parallel AB$

$$d = \frac{a+b}{2}$$

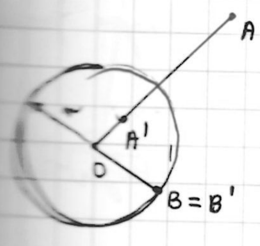


- Nierówność Ptolemeusza

W dowolnym czworokącie $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$

- Inwersja – przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi $A \neq O$ płaszczyzny przypisany punkt $A' \in \overrightarrow{OA}$ taki, że

$$OA \cdot OA' = r^2$$

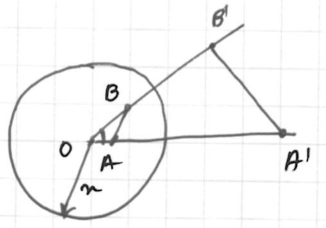


Przekształceniem odwrotnym do inwersji jest ta sama inwersja.

(1) Obrazem prostej l przechodzącej przez O jest ta sama prosta

(2) Obrazem prostej l nieprzechodzącej przez O jest okrąg ω przechodzący przez O, którego średnica zawierająca punkt O jest $\perp$ do l

(3) Obrazem okręgu nieprzechodzącego przez O jest okrąg nieprzechodzący przez O.



$$OB \cdot OB' = OA \cdot OA' \iff \frac{OB}{OA} = \frac{OA'}{OB'}$$

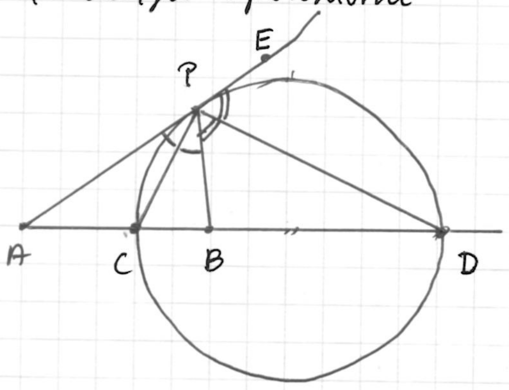
oraz $\sphericalangle BOA$ jest wspólny zatem

$$\Delta AOB \sim \Delta A'OB'$$

$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}$$

- Okrąg Apoloniusza

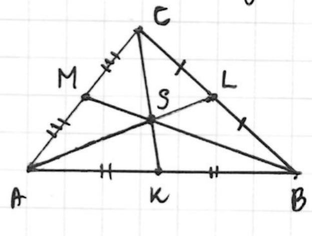
Def. okręgu Apoloniusza — okrąg to zbiór punktów P, dla których stosunek odległości od ustalonych punktów A, B jest jednakowy.



Istotnie łatwo pokazać, że jeśli $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ to $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$ =

$\sphericalangle BPD = \sphericalangle DPE$, zatem $\sphericalangle CPD = \frac{\pi}{2}$

- Tw. o środkowych w Δ



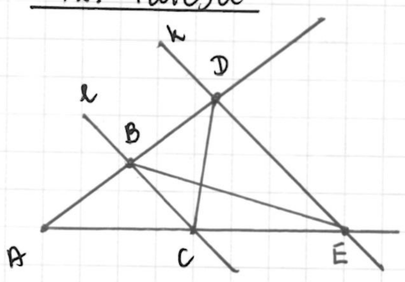
(1) Środkowe przecinają się w jednym punkcie

(2) $\frac{CS}{SK} = \frac{AS}{SL} = \frac{BS}{SM} = 2$

(3) Środkowe dzielą Δ_{ABC} na 6 trójkątów o równych polach.

(4) $\Delta_{KLM} \sim \Delta_{ABC}$ w skali $k = \frac{1}{2}$

- Tw. Talesa



$$k \parallel l \iff \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

$$\frac{[ABC]}{[BCD]} = \frac{AB}{BD} = \frac{[ABC]}{[BCE]} = \frac{AC}{CE}$$

- Tw. odwrotne do tw. Talesa

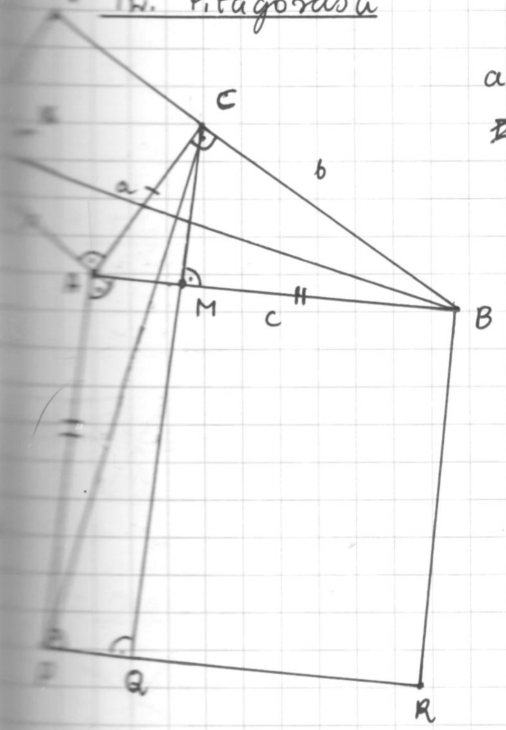
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow k \parallel l$$

- Nierówność trójkąta

Dla dowolnych trzech punktów A, B, C zachodzi

$|AC| \leq |AB| + |BC|$

- Tw. Pitagorasa



$a^2 + b^2 = c^2$

$[ACP] = [AMP] = \frac{1}{2}[AMQP]$

$[BKA] = [CKA] = \frac{1}{2}[ACLK] = \frac{1}{2}a^2$

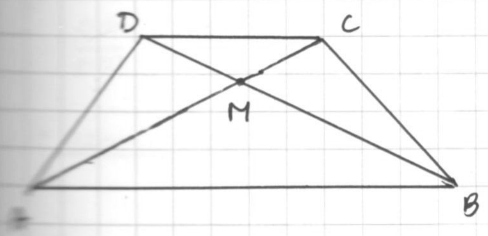
$AP = AB,\ AC = AK,\ \sphericalangle KAB = \sphericalangle PAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta_{PAC} \equiv \Delta_{BAK} \Rightarrow$

$\Rightarrow [ACP] = [BKA]$

$\Rightarrow [AMQP] = a^2$

- Pola w trapezie

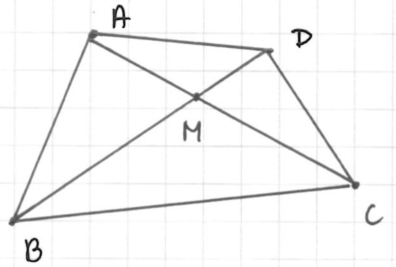


$[AMD] = [MCB]$

$$\frac{[AMB]}{[MDC]} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = \frac{1}{k^2}$$

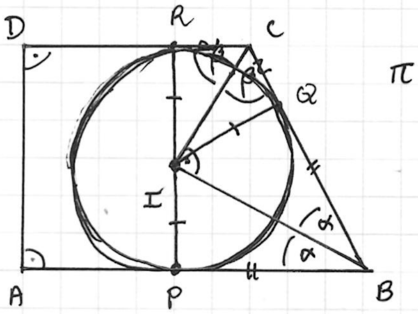
$$\frac{[AMB]}{[BMC]} = \frac{1}{k}$$

- Stosunek pól w czworokącie



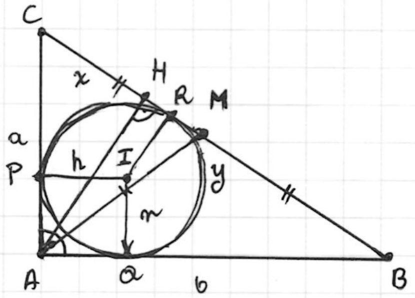
$$\frac{[AMD]}{[DMC]} = \frac{AM}{MC} = \frac{[BMA]}{[BMC]}$$

- Kilka własności trapezu i trójkąta prostokątnego



$$\pi + 2(\alpha+\beta) = 2\pi \iff \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$BP = BQ \ \wedge \ CR = CQ$$

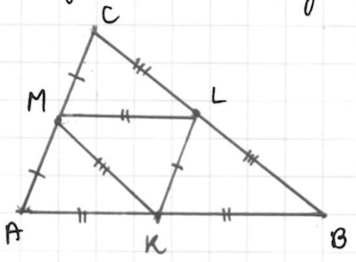


$$h = \sqrt{xy}$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2} = \sqrt{\ldots}$$

$$AP = AQ, \quad BQ = BR, \quad CR = CP$$

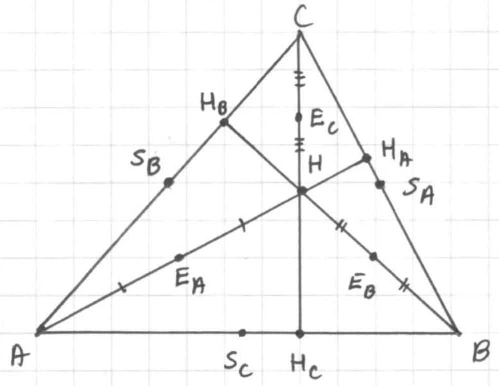
- Trójkąt środkowy



$$ML \parallel AB \qquad ML = \frac{1}{2} AB$$

$$\Delta_{AKM} \equiv \Delta_{KLM} \equiv \Delta_{BLK} \equiv \Delta_{MLC}$$

• Okrąg 9-punktów (Feuerbacha)



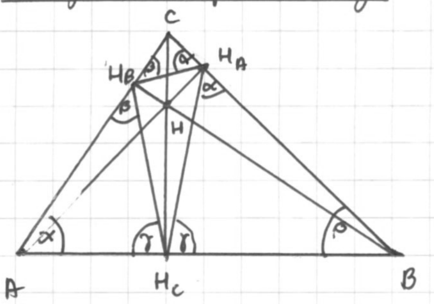
H – ortocentrum (punkt przecięcia wysokości Δ_{ABC})

S_A, S_B, S_C – środki odpowiednich boków Δ_{ABC}

E_A, E_B, E_C – punkty Eulera, tj $AE_A = HE_A$ itd.

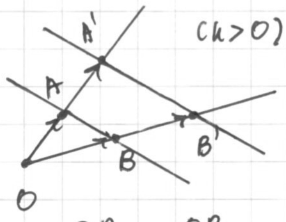
T: Punkty $H_A, \dots, S_A, \dots, E_A, \dots, E_C$ leżą na jednym okręgu.

• Trójkąt spodkowy



Dowód trywialny wychodząc od obserwacji, iż HH_AH_BC cykliczny.

• Jednokładność – przekształcenie geometryczne, które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A' taki, że



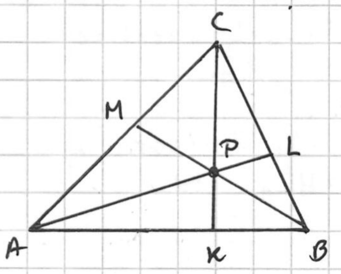
$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, $J_O^k(A) = A'$

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \Rightarrow AB \parallel A'B'$$

• Izometria – przekształcenie geometryczne zachowujące odległości między punktami

- **Podobieństwo** – przekształcenie geometryczne będące złożeniem izometrii i jednokładności

- **Tw. Cevy**



Trzy ceviany AL, BM, CK przecinają się w jednym punkcie ⟺

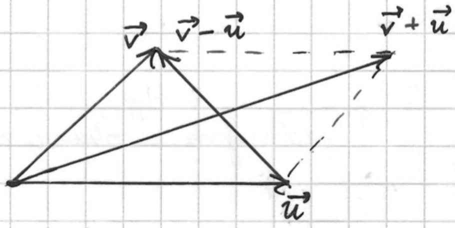
⟺ $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

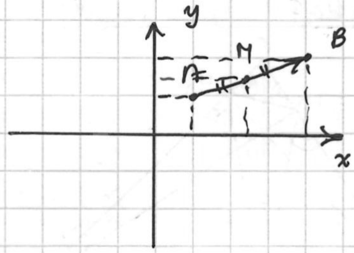
GEOMETRIA ANALITYCZNA

- **Wektory na płaszczyźnie**

$\vec{v} = [v_x, v_y]$, $\vec{u} = [u_x, u_y]$

$\vec{v} \pm \vec{u} = [v_x \pm u_x, v_y \pm u_y]$





- **Punkty na płaszczyźnie**

$A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$

$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

- **Warunek równoległości wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$**

$\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} = v_x u_y - v_y u_x = 0$

$\vec{v} \times \vec{u} = 0$

- **Iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$**

$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\gamma$

gdzie

- Waru

$\vec{v} \cdot$

- Sym

- Równ

$l: y =$

- Posta

$l:$

- Kąt

$l:$

Wekt

cos

- Prost

$l:$

$k:$

$l \parallel$

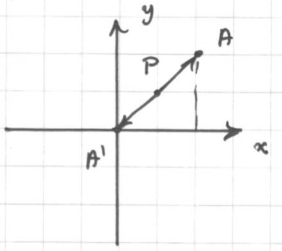
gdzie γ – kąt między $\vec{v}$ i $\vec{u}$

$$|\vec{v}| := \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

• <u>Warunek prostopadłości wektorów</u>

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y = 0 \implies [A, B] \perp [-B, A]$$

• <u>Symetria środkowa</u>



$$S_P\{(x_A, y_A)\} = \{(x_{A'}, y_{A'}) : \vec{PA} = -\vec{PA'}\}$$

• <u>Równanie kierunkowe prostej</u>

$$l: y = ax + b \qquad a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad A, B \in l$$

• <u>Postać ogólna prostej</u>

$$l: Ax + By + C = 0$$

• <u>Kąt między prostymi</u>

$$l: Ax + By + C = 0 \qquad k: Dx + Ey + F = 0$$

Wektor normalny do prostej $\vec{n_l} = [A, B]$, $\vec{n_k} = [D, E]$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{n_l} \cdot \vec{n_k}}{|\vec{n_l}| \cdot |\vec{n_k}|} = \frac{AD + BE}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{D^2 + E^2}}$$

• <u>Proste prostopadłe i proste równoległe</u>

$$l: Ax + By + C = 0 \qquad \vec{n_l} = [A, B]$$

$$k: Dx + Ey + F = 0 \qquad \vec{n_k} = [D, E]$$

$$l \parallel k \iff \vec{n_l} \parallel \vec{n_k} \iff \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} = AE - BD = 0$$

$$l \perp k \iff \vec{n}_l \perp \vec{n}_k \iff \vec{n}_l \cdot \vec{n}_k = AD + BE = 0$$

Przykład: $(Ax + By + C = 0) \parallel (Ax + By + F = 0)$

$(Ax + By + C = 0) \perp (Bx - Ay + F = 0)$

- Odległość punktu od prostej

$l: Ax + By + C = 0$

$P = (x_0, y_0)$

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

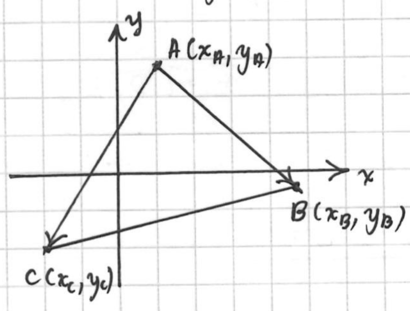
Korzystając z tego wzoru znajdujemy równania dwusiecznych, stycznych itp.

- Odległość między prostymi równoległymi

$l: Ax + By + C = 0$ $\quad$ $k: Ax + By + C' = 0$

$$d(l, k) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

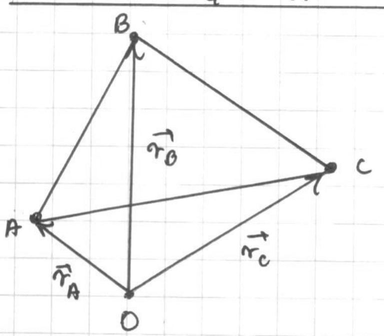
- Pole trójkąta



$$[ABC] = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} (x_B - x_A) & (y_B - y_A) \\ (x_C - x_A) & (y_C - y_A) \end{vmatrix} \right|$$

- **Środek ciężkości Δ_{ABC}**



$$\vec{R} = \frac{1\cdot\vec{r}_A + 1\cdot\vec{r}_B + 1\cdot\vec{r}_C}{1+1+1}$$

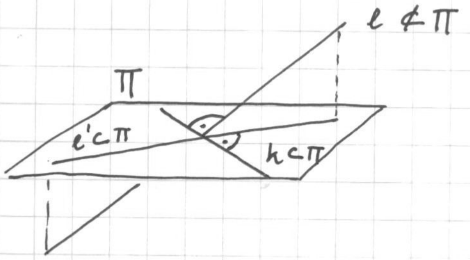
$$S = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

- **Równanie okręgu**

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

STEREOMETRIA

- **Tw. o trzech prostych prostopadłych**



Prosta $l \not\subset \pi$ jest prostopadła do prostej $k \subset \pi \iff$ gdy prosta l' będąca rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π jest prostopadła do prostej k.

- **Definicje**

Graniastosłup — wielościan, którego podstawy są wielokątami przystającymi i leżą na dwóch równoległych płaszczyznach, a wszystkie krawędzie boczne są do siebie równoległe

Graniastosłup prosty — graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy

Graniastosłup prawidłowy — graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny

Ostrosłup — wielościan, którego wszystkie wierzchołki poza jednym leżą w jednej płaszczyźnie

Ostrosłup prosty — ostrosłup, którego spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie

Ostrosłup prawidłowy — ostrosłup prosty, który ma w podstawie wielokąt foremny

- Twierdzenie 1

Krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ostrosłup jest prosty.

- Twierdzenie 2

Wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ostrosłup jest prosty.

ALG

Liczb

Posta

gdzi

Włas

- p

- p

- n

Liczb
liczb

Twier

- $(\bar{z}$

- $z \cdot$

- $(\bar{z}$

- $(\bar{z}$

- $\left(\frac{z}{z}\right.$

Inter

Licz
wsp

$|z|$

$\boxed{\text{ALGEBRA Z GEOMETRIĄ}}$

Liczby zespolone $\overset{def}{\iff}$ uporządkowana para liczb rzeczywistych (x, y).

Postać algebraiczna $z = x + iy = \Re\{z\} + i\,\mathrm{Im}\{z\}$

gdzie $i^2 = -1$ nazywamy jednostką urojoną.

Własności działań w $\mathbb{C}$

- ~~przemienność~~ łączność $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- przemienność $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- rozdzielność mnożenia wzgl. dodawania $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Liczbę $z^* = x - iy$ nazywamy liczbą sprzężoną do liczby $z = x + iy$.

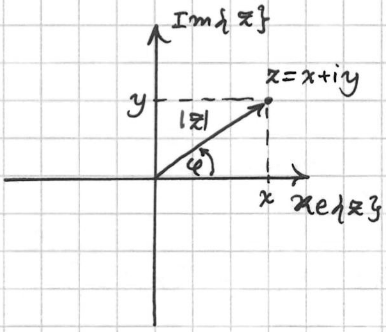
Twierdzenia

- $(z^*)^* = z$
- $|z^*| = |z|$
- $z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$
- $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
- $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$, $z_2 \neq 0$
- $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$

Interpretacja geometryczna

Liczbę $z = x + iy$ możemy traktować jako punkt o współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — (moduł liczby z) odległość liczby z od środka układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej



$$z = x + iy = \underbrace{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{postać trygonometryczna liczby zespolonej}}$$

- Liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ nazywamy **argumentem** liczby zespolonej z i oznaczamy

$$\varphi := \mathrm{Arg}\{z\}$$

- Liczbę $\varphi \in [0; 2\pi)$ nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy $\varphi = \arg z$.
- Dla $z = 0$ przyjmujemy $\arg z = 0$.

Wzór Eulera

- Dla każdego $\varphi \in \mathbb{R}$ zachodzi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
- Postać wykładnicza liczby zespolonej $z = |z|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$
- Własności postaci wykładniczej

(1) $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1$

(2) $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(3) $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(4) $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$, $k \in \mathbb{Q}$

(5) $e^{i\varphi} = e^{i\theta} \iff \varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(6) $r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \iff r_1 = r_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$

Przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie zespolonej

- mnożenie przez liczbę $u = \lambda e^{i\theta}$, $z \to z \cdot u = \lambda |z| e^{i(\varphi + \theta)}$ $\iff$ złożenie obrotu o kąt θ wokół $(0,0)$ wraz z jednokładnością o środku $(0,0)$ i skali λ
- dodawanie liczby $w = a + ib$ $\iff$ przesunięcie o wektor $[a, b]$

- transformacja $(\cdot)^*$, $z \to z^* = |z|e^{-i\varphi}$ $\iff$ odbicie względem prostej $\mathrm{Re}\{z\}$

- przekształcenie $\frac{1}{\cdot}$, $z \to \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$ $\iff$ złożenie inwersji względem okręgu jednostkowego o środku $(0,0)$ z odbiciem względem prostej $\mathrm{Re}\{z\}$

- przekształcenie $z \to -z$ $\iff$ symetria środkowa względem punktu $(0,0)$

- przekształcenie $z \to (z)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$:

  konstruujemy n-kąt foremny wpisany w okrąg o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt[n]{|z|}$ zaczynając od punktu $w = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\varphi/n}$. Wierzchołki tego wielokąta wyznaczają obrazy punktu $z = |z|e^{i\varphi}$ w tym przekształceniu

<u>Wzór de Moivre'a</u>

- $$\left(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)|z|^n$$

- $$\sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$$

gdzie $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

<u>Def. pierwiastkowania w $\mathbb{C}$</u>

$\sqrt[n]{w}$ nazywamy zbiór wszystkich liczb z spełniających równanie

$$z^n - w = 0 \quad , \quad \sqrt[n]{w} := \{z \in \mathbb{C} : z^n - w = 0\}$$

Oczywiście na mocy ZTA równanie to ma dokładnie n rozwiązań. Korzystając z postaci wykładniczej

$$|z|^n e^{in\varphi} = |w|e^{i\theta} \iff |z| = \sqrt[n]{|w|} \wedge n\varphi = \theta + 2k\pi$$

zatem $z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\theta/n} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Wielomiany

$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, gdzie $a_i, z \in \mathbb{C}$ nazywamy wielomianem zespolonym stopnia n.

Tw. Bezout'a

$a \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(z) \iff (z-a) \mid W(z)$

Zasadnicze Tw. Algebry (ZTA)

Każdy wielomian zespolony $W(z)$ stopnia $n \geq 1$ można przedstawić w postaci

$$W(z) = a(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

dla pewnych $a, z_i \in \mathbb{C}$

Tw. o pierwiastkach zespolonych (wielomianu o wsp. $\mathbb{R}$)

Niech $W(z)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, wtedy z_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $\iff$ z_0^* jest pierwiastkiem k-krotnym.

Wektory na płaszczyźnie zespolonej

Wielkość $v = z_2 - z_1$ możemy utożsamiać z wektorem o początku w punkcie z_1 i końcu w punkcie z_2.

Własności argumentu liczby zespolonej

- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Relacje

- Kocyn

$A \times B$

- Def. (

- Def. (re

- Def. (z

- Def. (r

Jeśli

$[x] :=$

Relacje i funkcje

- Iloczyn kartezjański zbiorów

$$A \times B := \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

para uporządkowana

- **Def. (relacji)** Dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego zbiorów X i Y nazywamy relacją $\mathcal{R}$. Mówimy, że element $x \in X$ jest w relacji $\mathcal{R}$ z $y \in Y \iff (x,y) \in \mathcal{R}$ (piszemy wtedy $x \mathcal{R} y$). Jeśli $X = Y$ to mówimy o relacji w zbiorze X.

- **Def. (relacji odwrotnej)** Relację $\mathcal{R}^{-1}$ odwrotną do relacji $\mathcal{R}$ w X definiujemy jako zbiór

$$\mathcal{R}^{-1} = \{ (x,y) \in X^2 : y \mathcal{R} x \}$$

Inaczej $x \mathcal{R}^{-1} y \iff y \mathcal{R} x$

- **Def. (złożenia relacji)** Złożenie relacji $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$ (złożenie $\mathcal{S}$ z $\mathcal{R}$) definiujemy jako zbiór

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} := \{ (x,z) \in X^2 : \exists_{y \in X}\ x \mathcal{S} y \wedge y \mathcal{R} z \}$$

- **Def. (relacji równoważności)** Relację $\mathcal{R}$ w zbiorze X nazywamy relacją równoważności $\iff$ spełnione są następujące trzy warunki:

1° $\forall_{x \in X}\ x \mathcal{R} x$ ($\mathcal{R}$ jest zwrotna)

2° $\forall_{x,y \in X}\ x \mathcal{R} y \iff y \mathcal{R} x$ ($\mathcal{R}$ jest symetryczna)

3° $\forall_{x,y,z \in X}\ (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$ ($\mathcal{R}$ jest przechodnia)

Jeśli $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności w X to zbiór

$[x] := \{ y \in X : x \mathcal{R} y \}$ nazywamy <u>klasą abstrakcji</u> elementu x.

Każdy $y \in [x]$ nazywamy **reprezentantem** tej klasy.

• **Def. (zbioru ilorazowego)** Zbiór klas abstrakcji relacji $\mathcal{R}$ w zbiorze X nazywamy **zbiorem ilorazowym**

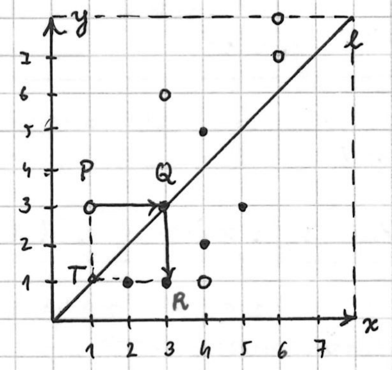
$$X/\mathcal{R} := \{[x] : x \in X\}$$

Relacja równoważności $\mathcal{R}$ w zbiorze X dzieli ten zbiór na podzbiory niepuste, rozłączne, dające w sumie zbiór X.

• Niech $\mathcal{R}$ i S będą relacjami w zbiorze X. Wówczas z def.

$$\mathcal{R} \circ S = \{(x,z) \in X^2 : \exists_{y \in X} : xSy \wedge y\mathcal{R}z\}$$

Obserwacja: $x(\mathcal{R} \circ S)z \iff$ istnieje łamana PQR taka, że $P(x,y) \in S$, $R(y,z) \in \mathcal{R}$, $Q \in \ell : y = x$ i $PQ \parallel OX$ i $QR \perp OX$.



$\circ \leftrightarrow S$

$\bullet \leftrightarrow \mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \{(2,1), (3,1), (4,2), (4,5), (5,3)\}$$

$$S = \{(1,3), (4,1), (3,6), (6,8), (6,7)\}$$

$$X = \mathbb{N}$$

Aby znaleźć $\mathcal{R} \circ S$ przesuwamy odcinek PQ wzdłuż odcinka QR (inaczej konstruujemy prostokąt $PQRT$) z wykresu $\mathcal{R} \circ S = \{(1,1)\}$

• Definicje

→ $\mathcal{R}$ jest **antysymetryczna** $\iff \forall_{x,y \in X} : (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$

→ $\mathcal{R}$ jest **asymetryczna** $\iff \forall_{x,y \in X} : x\mathcal{R}y \Rightarrow \sim(y\mathcal{R}x)$

→ $\mathcal{R}$ jest **spójna** $\iff \forall_{x,y \in X} : x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x \vee x = y$

• **Def. (porządku)** Relację $\mathcal{R}$ w zbiorze X nazywamy porządkiem w zbiorze X (inaczej relacją słabego porządku) $\iff$

1° $\mathcal{R}$ jest zwrotna: $\forall_{x\in X}\, x\mathcal{R}x$

2° $\mathcal{R}$ jest antysymetryczna: $\forall_{x,y\in X}: (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x=y$

3° $\mathcal{R}$ jest przechodnia: $\forall_{x,y,z\in X}: x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Wówczas X nazywamy zbiorem (częściowo) uporządkowanym przez $\mathcal{R}$.

• **Def. (porządku totalnego)** (inaczej porządku liniowego) Relację $\mathcal{R}$ w zbiorze X nazywamy porządkiem totalnym $\iff$

1° $\mathcal{R}$ jest porządkiem w zbiorze X

2° $\mathcal{R}$ jest spójna: $\forall_{x,y\in X}: x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x \vee x=y$

Wówczas X nazywamy zbiorem uporządkowanym totalnie (liniowo).

• Elementy $x,y\in X$ nazywamy porównywalnymi $\iff x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$

• Jeżeli $\mathcal{R}$ jest porządkiem w X i $A\subset X$ to zbiór A jest również uporządkowany przez $\mathcal{R}$ (co zapisujemy $\mathcal{R}|_{A\times A}$)

• **Definicje** Niech $\preceq$ będzie porządkiem w zbiorze X

1° $\overline{M}\in X$ jest elementem największym zbioru $X \iff \forall_{x\in X}: x\preceq \overline{M}$

2° $\overline{m}\in X$ jest elementem najmniejszym zbioru $X \iff \forall_{x\in X}: \overline{m}\preceq x$

3° Jeśli w zbiorze X istnieje element największy (najmniejszy) to jest on jedyny.

4° $M_{max}\in X$ jest elementem maksymalnym zbioru $X \iff$

$\iff \forall_{x\in X}: (M_{max}\preceq x) \Rightarrow (x = M_{max})$

5° $m_{min} \in X$ jest **elementem minimalnym** zbioru X $\iff$

$\iff \forall_{x \in X}: (x \preceq m_{min}) \Rightarrow (x = m_{min})$

6° Jeśli $a \in X$ jest elementem największym (najmniejszym) zbioru X to a jest **jedynym** elementem maksymalnym (minimalnym) zbioru X.

7° W zbiorze uporządkowanym liniowo (totalnie) pojęcia elementu najmniejszego i największego pokrywają się z pojęciami elementu minimalnego i maksymalnego.

8° Podzbiór $C \subset X$ jest **łańcuchem** $\overset{df}{\iff}$ $(C, \preceq|_{C \times C})$ jest zbiorem uporządkowanym totalnie (liniowo).

9° Element $M \in X$ nazywamy **majorantą** zbioru $A \subset X$

$\iff \forall_{x \in A}: x \preceq M$

10° Element $m \in X$ nazywamy **minorantą** zbioru $A \subset X$

$\iff \forall_{x \in A}\ m \preceq x$

11° Jeżeli zbiór A posiada co najmniej jedną majorantę (minorantę) to mówimy, że jest on ograniczony od góry (od dołu).

12° **Kres górny** zbioru $A \subset X$ $\overset{df}{\iff}$ element najmniejszy zbioru majorant (oznaczamy $\sup A$).

13° **Kres dolny** zbioru $A \subset X$ $\overset{df}{\iff}$ element największy zbioru minorant (oznaczamy $\inf A$).

Def. (r

Def. (fu

! Dziedzina naddu

! Często fakt,

Def. (silnego porządku) Relacja $\prec$ jest silnym porządkiem w zbiorze X $\Leftrightarrow$

1° Relacja $\preceq$ jest (słabym) porządkiem w zbiorze X.

2° $\forall_{x,y\in X}: x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y \wedge x \neq y)$

Def. (funkcji) Podzbiór $f \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją przekształcającą zbiór X w Y, jeśli

$$\forall_{x\in X}: \exists!_{y\in Y}: (x,y)\in f.$$

Ten element y nazywamy wartością funkcji f w punkcie x i oznaczamy $f(x)$.

! Dziwna notacja: $\mathcal{R} = \overbrace{(X, \mathrm{gr}\,\mathcal{R}, Y)}^{\text{uporządkowana trójka}}$, gdzie X nazywamy naddziedziną, Y zapasem, a $\mathrm{gr}\,\mathcal{R}$ wykresem relacji.

! Często w relacjach równoważności powołujemy się na fakt, iż relacja $=$ jest relacją równoważności.

Działania algebraiczne

Def. (działania) Funkcję $f: A \times A \mapsto A$, która każdej uporządkowanej parze elementów (x,y) zbioru A przyporządkowuje element $f(x,y)$ tego samego zbioru nazywamy dwuargumentowym działaniem (wewnętrznym) w zbiorze A.

Na oznaczenie działania używamy specjalnego znaczka $(+, \cdot, \times, \circ)$ i zamiast $+(x,y)$ piszemy $x+y$. Element $f(x,y)$ nazywamy wynikiem działania f na parę (x,y).

Def. (działania zewnętrznego) Funkcję $\cancel{F}$ $f: F \times X \mapsto X$ nazywamy działaniem zewnętrznym. $f(\alpha, x) = \alpha * x$, gdzie $\alpha \in F$ i $x \in X$ nazywamy wynikiem działania.

Def. (działania łącznego) Działanie $*: A \times A \mapsto A$ nazywamy łącznym $\Leftrightarrow$

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

dla dowolnych $x, y, z \in A$.

Def. (działania przemiennego) Działanie $*: A \times A \mapsto A$ nazywamy przemiennym $\Leftrightarrow$

$$\forall_{x,y \in A} \quad x * y = y * x$$

Def. (   ) Mówimy, że działanie $\vee: A \times A \mapsto A$ jest rozdzielne względem działania $\wedge: A \times A \mapsto A$ $\Leftrightarrow$

$$\forall_{x,y,z \in A}: \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Def. (elementu neutralnego) Element $\varepsilon \in A$ nazywamy elementem neutralnym działania $*$ w zbiorze A $\Leftrightarrow$

$$\forall_{x \in A} \quad \varepsilon * x = x * \varepsilon = x$$

Tw. Jeżeli w zbiorze A z działaniem $*$ istnieje element neutralny ε to jest on jedyny.

Def. (grupy) Trójkę $(\Gamma, *, \varepsilon)$, gdzie Γ jest zbiorem, $*$ jest działaniem w Γ oraz $\varepsilon \in \Gamma$ nazywamy grupą $\Leftrightarrow$

1° $\forall_{x,y,z \in \Gamma} \quad x*(y*z) = (x*y)*z$, czyli działanie jest łączne

2° Element ε jest elementem neutralnym działania $*$: $\exists_{\varepsilon \in \Gamma} : \forall_{x \in \Gamma} \; x * \varepsilon = \varepsilon * x = x$

3° $\forall_{x \in \Gamma} : \exists_{\tilde{x} \in \Gamma} : \; x * \tilde{x} = \tilde{x} * x = \varepsilon$

Element $\tilde{x}$ nazywamy elementem odwrotnym do x i oznaczamy x^{-1}.

Tw. Dany element grupy ma dokładnie jedną odwrotność.

Def. (grupy abelowej) Jeśli $(\Gamma, *, \varepsilon)$ jest grupą i

$$\forall_{x,y \in \Gamma} \quad x * y = y * x \quad (* \text{ jest przemienne})$$

to grupę taką nazywamy grupą abelową (przemienną).

Gdy zadanym działaniem $*$ w grupie jest dodawanie (oznaczane $+$) to mówimy, że grupa ta jest <u>typu addytywnego</u>. W takim przypadku element neutralny ε nazywamy <u>zerem</u> (oznaczany 0), a element odwrotny x^{-1} nazywamy <u>elementem przeciwnym</u> do x (oznaczany $-x$).

<u>Def. (pierścienia)</u> Strukturę $(\Gamma, \square, \circ, \varepsilon)$ nazywamy pierścieniem $\Longleftrightarrow$

1° Struktura $(\Gamma, \square, \varepsilon)$ jest grupą abelową.

2° $\forall_{x,y,z \in \Gamma} \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

3° $\forall_{x,y,z \in \Gamma} \quad (x \square y) \circ z = (x \circ z) \square (y \circ z) \ \wedge$

$\wedge \ x \circ (y \square z) = (x \circ y) \square (x \circ z)$

(4°) Jeśli $\forall_{x,y \in \Gamma} \ x \circ y = y \circ x$ to pierścień nazywamy <u>przemiennym</u>.

Działanie $\square$ jest typu addytywnego (ma wiele wspólnego z dodawaniem $+$), a działanie $\circ$ jest typu multiplikatywnego (ma wiele wspólnego z mnożeniem $\cdot$). Element neutralny działania $\square$ oznaczamy $\mathbf{0}$, a element symetryczny do $x \in \Gamma$ wzgl. $\square$ nazywamy <u>elementem przeciwnym</u> i oznaczamy $-x$!

(5°) Jeśli istnieje $\eta \in \Gamma$, takie, że η jest elementem neutralnym działania $\circ$ to η nazywamy jedynką i oznaczamy $\mathbb{1}$, a pierścień nazywamy <u>pierścieniem z jedynką</u>.

Def. (dzielników $\mathbb{0}$) Elementy $x, y \in \Gamma$ nazywamy dzielnikami $\mathbb{0}$ $\iff$ $x \circ y = \mathbb{0} \wedge x, y \neq \mathbb{0}$

(6°) Pierścień przemienny z jedynką nazywamy pierścieniem całkowitym, jeśli w pierścieniu tym nie występują dzielniki $\mathbb{0}$.

Def. (ciała) Pierścień z jedynką $(K, \square, \circ, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ nazywamy ciałem $\iff$

$$\forall_{x \in K \setminus \{\mathbb{0}\}} \ \exists_{x^{-1} \in K} : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = \mathbb{1}$$

element odwrotny (symetryczny) do x względem działania $\circ$

Jeśli ponadto $\forall_{x, y \in K} : x \circ y = y \circ x$ to ciało nazywamy ciałem przemiennym.

(W ciele nie ma dzielników $\mathbb{0}$)

Def. (homomorfizmu) Odwzorowanie $\mathcal{H} : \Gamma_1 \mapsto \Gamma_2$ nazywamy homomorfizmem grupy $(\Gamma_1, +)$ w grupę $(\Gamma_2, \oplus)$ $\iff$

$$\forall_{x, y \in \Gamma_1} : \mathcal{H}(x + y) = \mathcal{H}(x) \oplus \mathcal{H}(y)$$

1° Jeśli ε_1 jest elementem neutralnym grupy $(\Gamma_1, +)$ to $\mathcal{H}(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$ jest elementem neutralnym grupy $(\Gamma_2, \oplus)$

2° $\forall_{x \in \Gamma_1} : \mathcal{H}(\tilde{x}) = [\widetilde{\mathcal{H}(x)}]$

Def. (homomorfizmu pierścienia) Odwzorowanie $\mathcal{H} : \Gamma_1 \mapsto \Gamma_2$ nazywamy homomorfizmem pierścienia $(\Gamma_1, +, \cdot)$ w pierścień $(\Gamma_2, \oplus, \odot)$ $\iff$

1° $\forall_{x, y \in \Gamma_1} \ \mathcal{H}(x + y) = \mathcal{H}(x) \oplus \mathcal{H}(y)$

2° $\forall_{x, y \in \Gamma_1} \ \mathcal{H}(x \cdot y) = \mathcal{H}(x) \odot \mathcal{H}(y)$

Def. ( ) Dwie struktury nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieje homomorfizm bijektywny (<u>izomorfizm</u>) z jednej struktury na drugą.

<u>Izomorfizm</u> struktury na samą siebie nazywamy <u>automorfizmem</u>.

ymi,
ny
niga.

Przestrzenie wektorowe

$(F(X,\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$, $F(X,\mathbb{R}) := \{f : f: X \mapsto \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, $\mathbb{R}[x]_n := \{W(x) = a_n x^n + \ldots + a_0,\ a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$

Def. (przestrzeni wektorowej) strukturę $(V, K, +, \cdot)$, gdzie V – zbiór, $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem oraz

$+ : V \times V \mapsto V$ (działanie wewnętrzne w V)
$\cdot : K \times V \mapsto V$ (działanie zewnętrzne w V)

nazywamy przestrzenią wektorową nad ciałem K $\Leftrightarrow$

1° struktura $(V, +)$ jest grupą abelową

2° $\forall_{\vec{u}, \vec{v} \in V}\ \forall_{\alpha \in K} :\ \alpha \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\alpha \cdot \vec{u})$

3° $\forall_{\vec{v} \in V} : \forall_{\alpha, \beta \in K} :\ (\alpha \odot \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v})\ \wedge$

$\wedge\ (\alpha \oplus \beta) \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{v})$

4° $\forall_{\vec{v} \in V} :\ \mathbb{1} \cdot \vec{v} = \vec{v}$, gdzie $\mathbb{1}$ jest elementem neutralnym w ciele $(K, \oplus, \odot)$ ze względu na działanie multiplikatywne $\odot$

Elementy zbioru V nazywamy wektorami, a zbiór K – skalarami.

$+$ – dodawanie wektorów; $\cdot$ – mnożenie wektora przez skalar; el. neutralny grupy $(V, +)$ nazywamy wektorem zerowym $\vec{0}$.

Twierdzenia Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K.

1° $\forall_{\vec{v} \in V} :\ \mathbb{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}$, gdzie $\mathbb{0}$ jest el. neutralnym w ciele $(K, \oplus, \odot)$ ze względu na działanie addytywne $\oplus$.

2° $\forall_{\alpha \in K} :\ \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

3° $\forall_{\alpha \in K} : \forall_{\vec{v} \in V} :\ (-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v})$

4° $\forall_{\alpha \in K} : \forall_{\vec{v} \in V} : \ \alpha \cdot (-\vec{v}) = -(\alpha \cdot \vec{v})$

5° $\forall_{\alpha \in K} : \forall_{\vec{v} \in V} : \ \alpha \cdot \vec{v} = \vec{0} \iff \alpha = 0 \ \vee \ \vec{v} = \vec{0}$

6° $\forall_{\alpha \in K \setminus \{0\}} : \forall_{\vec{u}, \vec{v} \in V} : \ \alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} \iff \vec{u} = \vec{v}$

7° $\forall_{\alpha, \beta \in K} : \forall_{\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}} : \ \alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v} \implies \alpha = \beta$

<u>Def. (podprzestrzeni wektorowej)</u> Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K. Zbiór $U \subset V$ $(U \neq \emptyset)$ nazywamy podprzestrzenią wektorową przestrzeni $V \iff$

1° $\forall_{\vec{u}, \vec{v} \in U} : \ (\vec{u} + \vec{v}) \in U$

2° $\forall_{\alpha \in K} : \forall_{\vec{u} \in U} : \ (\alpha \cdot \vec{u}) \in U$

! Każda podprzestrzeń przestrzeni wektorowej jest również przestrzenią wektorową.

! Wektor zerowy $\vec{0}$ jest elementem każdej podprzestrzeni.

W każdej przestrzeni V zbiory $\{\vec{0}\}$ i V są podprzestrzeniami (odp. trywialną i niewłaściwą)

<u>Tw. 1</u> $U \subset V$ $(U \neq \emptyset)$ jest podprzestrzenią wektorową $\iff$

$$\forall_{\alpha, \beta \in K} : \forall_{\vec{u}, \vec{v} \in U} : \ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in U$$

<u>Tw. 2</u> $U \subset V$ $(U \neq \emptyset)$ jest podprzestrzenią wektorową $\iff$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : \forall_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K} : \forall_{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in U} : \ (\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n) \in U$$

<u>Def. ( )</u> Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Wektor postaci

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

nazywamy <u>liniową kombinacją wektorów</u> $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, a skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jej <u>współczynnikami</u>.

Def. ( ) Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Wektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ nazywamy <u>liniowo niezależnymi</u>

$$\forall_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K} : \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$$

Wektory nazywamy liniowo zależnymi jeśli nie są one liniowo niezależne.

Tw. Wektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ są liniowo zależne $\Longleftrightarrow$ gdy przynajmniej jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

1° Zespół wektorów $v_1, v_2, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{v}_n$ jest liniowo zależny.

2° Dla $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u}, \vec{v}$ są liniowo zależne $\Longleftrightarrow$

$$\exists_{\alpha \in K} : \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$$

3° Podzbiór wektorów liniowo niezależnych jest liniowo niezależny.

4° Nadzbiór wektorów liniowo zależnych jest liniowo zależny.

Tw. Jeśli $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne to współczynniki liniowej kombinacji $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{v}$$

są wyznaczone jednoznacznie.

Def. (powłoki liniowej) Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. <u>Liniową powłoką</u> zbioru $A \subset V$ $(A \neq \emptyset)$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{Lin}\, A := \{ \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K, \ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in A \}$$

(czyli zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A)

Lin A jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V i nazywamy ją podprzestrzenią generowaną przez A.

Def. (bazy) Zbiór $B \subset V$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej V, jeżeli

1° $\mathrm{Lin}\, B = V$ (każdy wektor $\in V$ daje się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów z B)

2° $\forall_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in B} : \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych.

$B \subset V$ jest bazą V $\Leftrightarrow$ każdy wektor $\vec{v} \in V$ można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów z B.

Tw. Niech V będzie przestrzenią wektorową, $B \subset V$. Następujące zdania są równoważne:

1° B jest bazą V

2° B jest maksymalnym zbiorem wektorów liniowo niezależnych z V

3° B jest minimalnym zbiorem wektorów rozpinających V, tzn. minimalnym (w sensie inkluzji) zbiorem wektorów takich, że dowolny wektor $\vec{v} \in V$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową tych wektorów.

Lematy

1° Każda niezerowa przestrzeń wektorowa ma bazę.

2° Dwie różne bazy dowolnej przestrzeni wektorowej są równoliczne.

3° Jeśli $\dim V = n$ to każdy zespół n wektorów liniowo niezależnych z V stanowi bazę tej przestrzeni.

Def. ( ) Wymiar przestrzeni wektorowej. $(V, K, +, \cdot)$

1° Niech B będzie bazą tej przestrzeni wektorowej. Jeżeli B jest zbiorem skończonym to mówimy że przestrzeń V jest skończenie wymiarowa, a liczbę wektorów $\in B$ nazywamy wymiarem przestrzeni V i oznaczamy $\dim V$

2° Jeśli $B = \{\vec{0}\}$ to $\dim V = 0$

3° Jeśli baza B składa się z nieskończonej liczby wektorów to piszemy $\dim V = +\infty$

Def. ( ) Reperem bazowym przestrzeni wektorowej nazywamy dowolną jej bazę, w której ustaliliśmy kolejność wektorów.

Def. ( ) Współrzędne wektora

Niech $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ będzie reperem bazowym przestrzeni V nad ciałem K. Dla dowolnego wektora $\vec{v} \in V$ mamy jednoznacznie

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots \alpha_n \vec{e}_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$$

gdzie współczynniki $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazywamy współrzędnymi wektora $\vec{v}$ względem bazy B piszemy wówczas

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_B$$

Def. ( ) Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ (w skrócie $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$). Bazę tej przestrzeni

$$B_K := \left(\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \ \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\right)$$

nazywamy bazą kanoniczną.

Tw. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie wymiarową, a $U \subset V$ jej podprzestrzenią. Wówczas

1° $\dim U \leq \dim V$

2° $\dim U = \dim V \iff U = V$

Def. ( ) Suma podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni wektorowej V nazywamy zbiór

$$V_1 + V_2 := \{ \vec{v_1} + \vec{v_2} : \vec{v_1} \in V_1 \wedge \vec{v_2} \in V_2 \}$$

Tw. Jeżeli V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V to $V_1 + V_2$ też jest podprzestrzenią oraz $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią.

Def. ( ) Sumę $V_1 + V_2$ nazywamy sumą prostą (i oznaczamy $V_1 \oplus V_2$) $\iff$

$$\forall_{\vec{v} \in (V_1 + V_2)} : \exists!_{\vec{v_1} \in V_1, \vec{v_2} \in V_2} : \vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$$

Tw. $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \iff V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$

Def. ( ) Niech $V_1 \subset V$ będzie podprzestrzenią V. Wówczas podprzestrzeń $V_2 \subset V$ taką, że $V_1 \oplus V_2 = V$ nazywamy przestrzenią uzupełniającą V_1.

Tw. Dla każdej podprzestrzeni dowolnej przestrzeni wektorowej istnieje jej przestrzeń uzupełniająca.

Tw. Dla dowolnych skończenie wymiarowych podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni wektorowej V:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Macierze i układy równań

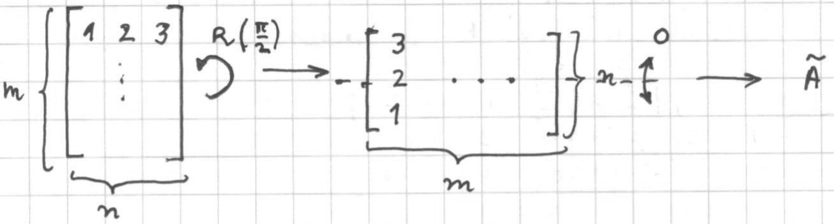
Def. ( ) Macierz to dowolne odwzorowanie $f: \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \mapsto \mathbb{K}$ gdzie $\mathbb{K}$ jest pewnym ciałem a zbiór wartości zapisujemy jako

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz o m wierszach i n kolumnach nazywamy macierzą wymiaru $m \times n$.

$$A \cong [a_{ij}] \cong [a_{ij}]_{m\times n} \cong A_{m\times n}$$

Def. ( ) Macierz transponowana do macierzy $A_{m\times n}$ nazywamy macierz $\tilde{A}_{n\times m} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n} \iff \forall_{i,j}\ \tilde{a}_{ij} = a_{ji}$



Def. ( ) Macierz zerowa to macierz, której wszystkie elementy są równe 0.

Def. ( ) Macierz $A_{m\times n}$ nazywamy macierzą kwadratową $\iff m = n$.

a) elementy $a_{ii} \in [a_{ij}]_{n\times n}$ tworzą przekątną główną macierzy kwadratowej

b) macierz $A_{n\times n}$ nazywamy diagonalną $\iff$ wszystkie jej elementy poza przekątną są równe 0

c) macierz jednostkowa to macierz diagonalna, w której wszystkie elementy na przekątnej głównej są równe 0. (I, I_n)

d) macierz $A_{n\times n}$ nazywamy symetryczną $\iff A = \tilde{A}$

Działania na macierzach

1° $[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{k\times l} \Leftrightarrow m=k \wedge n=l \wedge \forall_{i,j}\ a_{ij}=b_{ij}$

2° $[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} \overset{def}{=} [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

3° Mnożenie macierzy przez skalar $\alpha\cdot[a_{ij}]_{m\times n} \overset{def}{=} [\alpha\cdot a_{ij}]_{m\times n}$

4° Mnożenie dwóch macierzy A, B jest wykonalne tylko jeśli col(A) = row(B), tj. $A=[a_{ij}]_{m\times k}$, $B=[b_{ij}]_{k\times n}$ wówczas

$$A\cdot B = [a_{ij}]_{m\times k}\cdot[b_{ij}]_{k\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot1+4\cdot2 & 3\cdot1+5\cdot2 \\ 2\cdot3+4\cdot4 & 3\cdot3+5\cdot4 \\ 2\cdot5+4\cdot6 & 3\cdot5+5\cdot6 \end{bmatrix}$$

---

e) Macierz $A_{n\times n}$ nazywamy trójkątną górną / dolną $\Leftrightarrow$ wszystkie jej elementy poniżej/powyżej przekątnej głównej są równe 0.

Własności działań na macierzach

Niech $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ oznacza zbiór wszystkich macierzy wymiaru $m\times n$ nad ciałem przemiennym $\mathbb{K}$, wówczas

1° $(M_{m\times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową, gdzie $\cdot$ jest działaniem zewnętrznym mnożenia macierzy przez skalar z $\mathbb{K}$.

2° $\forall_{A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})}\quad I_m\cdot A_{m\times n} = A_{m\times n} \wedge A_{m\times n}\cdot I_n = A_{m\times n}$

3° O ile działania są wykonalne to zachodzi

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A+B)^T = \tilde{A} + \tilde{B}$
- $(\alpha A)^T = \alpha \tilde{A}$
- $(A \cdot B)^T = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$

$\boxed{\text{Wyznacznik macierzy}}$

- Dla macierzy 2×2 mamy $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

jest to pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $[a_{11}, a_{12}]$ i $[a_{21}, a_{22}]$.

- Dla macierzy 3×3 mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

- Wyznacznik możemy obliczać tylko dla macierzy kwadratowych $n \times n$. Obliczanie $\det A_{n \times n}$ dla $n > 3$ z def. jest żmudne.

Własności wyznaczników

1° $\forall_{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})} : \det A = \det \tilde{A}$

2° $\det I_n = 1$

3° Jeżeli jakiś wiersz lub kolumna macierzy A składa się z samych 0 to $\det A = 0$

4° Jeśli pomnożymy i-ty wiersz (lub j-tą kolumnę) macierzy A przez skalar α to wyznacznik otrzymanej w ten sposób macierzy B wynosi $\det B = \alpha \det A$

5° $\det(\alpha A_{n\times n}) = \alpha^n \det A$

6° Przestawienie dwóch wierszy lub kolumn macierzy nie zmienia wartości wyznacznika, a jedynie zmienia jego znak na przeciwny.

7° Jeśli jakiś wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową pozostałych wierszy (kolumn) to $\det A = 0$

8° Wartość wyznacznika nie zmieni się, jeżeli do wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn).

9° (Tw. Cauchy'ego) $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$

<u>Def. ( )</u> <u>Minorem stopnia k</u> macierzy $A_{m\times n}$ nazywamy wyznacznik dowolnej ~~[illegible]~~ podmacierzy kwadratowej $k\times k$ zawartej w A $(k \le \min\{m,n\})$ powstałej przez wykreślenie $n-k$ col i $m-k$ row.
~~Jeśli [illegible] $A_{k\times k}$ to~~

Jeśli $A = A_{n\times n}$ to wyznacznik macierzy 

nazywamy minorem odpowiadającym a_{ij} i oznaczamy go M_{ij}.

<u>Def. ( )</u> <u>Dopełnieniem algebraicznym</u> el. $a_{ij} \in [a_{ij}]_{n\times n}$ nazywamy liczbę

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

<u>Tw. Laplace'a</u>

Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ mamy

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n\}} \quad \det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

oraz

$$\forall_{j\in\{1,\dots,n\}} \quad \det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

<u>Tw.</u> ( ) Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów na przekątnej głównej

Rząd macierzy

<u>Def. ( )</u> Rzędem macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn (= wierszy).

- $r(A) \le \min\{m,n\}$
- $r(\tilde{A}) = r(A)$

<u>Def. ( )</u> Macierz A ma <u>postać schodkową</u>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bigcirc$ – schodek macierzy A

liczba schodków : 3

<u>Tw. ( )</u> Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków.

Operacje elementarne:

1° Zamiana miejscami wierszy (kolumn)

2° Dodanie do wiersza (kolumny) kombinacji liniowej pozostałych wierszy (kolumn).

3° Pomnożenie wiersza (kolumny) przez skalar $\alpha \neq 0$.

Tw. ( ) Rząd macierzy nie zmienia się pod wpływem operacji elementarnych.

Algorytm Gaussa

Każdą macierz można doprowadzić do postaci schodkowej za pomocą operacji elementarnych, stosując algorytm Gaussa na wierszach.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Chcemy zerować kolejne kolumny przy pomocy kolejnych od góry wierszy (tj. operacji elementarnych na nich)

$$A \underset{w_1 \leftrightarrow w_4}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tw. ( ) Rząd macierzy ~~schodkowej~~ jest równy największemu ze stopni minorów niezerowych.

Macierz odwrotna

<u>Def. ( )</u> Niech $A = A_{n\times n}$. Macierz kwadratową B taką, że $A\cdot B = B\cdot A = I$ nazywamy macierzą odwrotną do A i (o ile istnieje) oznaczamy ją A^{-1}, a macierz A nazywamy <u>odwracalną</u>.

Macierz odwrotna do danej macierzy (o ile istnieje) jest wyznaczona jednoznacznie.

$A_{n\times n}$ jest odwracalna $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

Jeśli $A_{n\times n}$ jest odwracalna to:

1° $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

2° $A^{-1} = (\det A)^{-1} (A^D)^T$, gdzie $A^D = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A.

<u>Def. ( )</u> Macierz $A = A_{n\times n}$ nazywamy <u>osobliwą</u> $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

<u>Własności macierzy odwracalnych</u>

Niech A, B będą macierzami odwracalnymi. Wówczas A^{-1}, A^T, αA, $A\cdot B$, A^n też są odwracalne oraz zachodzi

1° $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

2° $(A^{-1})^{-1} = A$

3° $(\tilde{A})^{-1} = (A^{-1})^T$

4° $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$

5° $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

6° $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Aby znaleźć macierz odwrotną do macierzy A można skorzystać z algorytmu Gaussa przy czym możemy korzystać tylko z operacji elementarnych na wierszach!

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{A}\left.\begin{array}{|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.\underbrace{\left.\begin{array}{|c} \\ \ldots \\ \\ \end{array}\right]}_{A^{-1}}$$

Można również rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 1x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 = y_2 \\ 2x_1 + 0x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

i znaleźć jego ogólne rozwiązanie

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 - 4y_2 + y_3 \\ x_3 = -2y_1 + 6y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

owina
mniemy
lko z
mentenych
ach !

ze

Układy równań liniowych

Układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

nazywamy układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$.

Rozwiązaniem tego układu nazywamy każdą n-kę $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniającą wszystkie równania tego układu.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ (macierz współczynników / macierz główna)

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ (macierz wyrazów wolnych)

$$[A|B] := \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$ (macierz uzupełniona)

Układ $(*)$ możemy zapisać $A \cdot X = B$ (postać macierzowa).

Def. ( ) Jeśli $B = 0$ to układ (*) nazywamy jednorodnym.

Def. ( ) Układ (*) nazywamy:

1° oznaczonym $\Leftrightarrow$ ma dokładnie jedno rozwiązanie

2° nieoznaczonym $\Leftrightarrow$ ma więcej niż jedno rozwiązanie

3° sprzecznym $\Leftrightarrow$ nie ma rozwiązań

Def. ( ) Jeśli $A = A_{n \times n}$ to układ (*) nazywamy układem kwadratowym.

Def. ( ) Układ (*) nazywamy układem Cramera $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ i jest to układ kwadratowy.

Tw. (Cramera) Jeżeli (*) jest układem Cramera to

1° jest to układ oznaczony

2° zachodzą wzory Cramera

$$x_j = (\det A)^{-1} \cdot D_{x_j} \quad \text{gdzie}$$

D_{x_j} jest wyznacznikiem macierzy powstałej z A przez zastąpienie j-tej kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych.

Tw. (Kroneckera – Capellego) Układ $A \cdot X = B$ ma co najmniej 1 rozwiązanie $\Leftrightarrow$

$$r(A) = r([A|B])$$

a) Układ (*) jest sprzeczny $\Leftrightarrow$ $r(A) \neq r([A|B])$

b) Układ (*) jest oznaczony $\Leftrightarrow$ $r(A) = r([A|B]) = n$, gdzie n jest liczbą niewiadomych.

c) Jeśli $r(A) = r([A|B]) \neq n$ to układ (*) jest nieoznaczony i ma rozwiązania zależne od $n - r(A)$ parametrów.

- Układ jednorodny ma zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie $X = 0$, zatem jest oznaczony lub nieoznaczony

- Jeśli (*) jest układem kwadratowym to

  1° $\det A = 0$ oraz pewien $D_{x_j} \neq 0$ to (*) jest sprzeczny

  2° $\det A = D_{x_1} = \dots = D_{x_n} = 0$ to (*) jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Metoda Gaussa

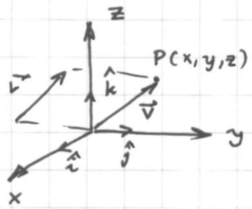
Układy równań liniowych można rozwiązywać sprowadzając macierz uzupełnioną $[A|B]$ do postaci schodkowej algorytmem Gaussa.

- Jeśli $[A|B]$ jest macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$ to:

  1° Jeśli $\det[A|B] \neq 0 \Rightarrow r([A|B]) = n$ (bo rząd macierzy jest równy największemu ze stopni minorów niezerowych), ale ~~det~~ $r(A) \leq n-1 < n \Rightarrow$

  $\Rightarrow r(A) \neq r([A|B]) \Rightarrow$ układ jest sprzeczny

Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$ (E_3)



Układ współrzędnych rozpięty przez wersory $\hat{i} = [1,0,0]$, $\hat{j} = [0,1,0]$, $\hat{k} = [0,0,1]$

$P = (x, y, z)$ — punkt

$\vec{v} = [x, y, z]$ — wektor

Def. ( ) Odległością Euklidesową punktów $P = (x_1, y_1, z_1)$ i $Q = (x_2, y_2, z_2)$ nazywamy liczbę

$$d(P,Q) = d(Q,P) := \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

W $\mathbb{R}^n$ mamy $d(P,Q) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_2^i - x_1^i)^2}$

Odwzorowanie $d: (P,Q) \mapsto d(P,Q)$ nazywamy metryką euklidesową.

Dla dowolnych $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{PQ} := [x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1]$$

Def. ( ) Normą euklidesową wektora $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$ nazywamy liczbę

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

W $\mathbb{R}^n$ mamy $\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v^{(i)2}}$

Zachodzi $d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$

Def. ( ) Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ nazywamy liczbę

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = \vec{u} \bullet \vec{v} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$

Zachodzi

$1^\circ \sqrt{\vec{v}\bullet\vec{v}} = \|\vec{v}\|$ $\qquad 2^\circ \ \vec{v}\bullet\vec{v} = 0 \iff \vec{v} = 0$

$3^\circ \ (\vec{u}+\vec{v})\circ\vec{w} = \vec{u}\bullet\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

Tw. (Nierówność Cauchy'ego – Schwarza)

Dla dowolnych wektorów w $\mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\| \geqslant \|\vec{v}\cdot\vec{u}\|$$

gdzie równość zachodzi $\iff$ $\vec{u},\vec{v}$ są liniowo zależne.

Def. ( ) Kątem między niezerowymi wektorami $\vec{u},\vec{v}$ nazywamy liczbę $\varphi\in[0;\pi]$ taką, że

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \quad \text{i piszemy} \quad \measuredangle(\vec{u},\vec{v}) := \varphi$$

Def. ( ) Niezerowe wektory nazywamy ortogonalnymi $\iff \varphi = \pi/2$.

Niezerowe wektory nazywamy równoległymi $\iff \varphi = 0 \lor \varphi = \pi$

Def. ( ) Iloczynem wektorowym w $\mathbb{R}^3$ nazywamy odwzorowanie

$$\times : E_3^2 \ni (\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}\times\vec{v} \in E_3$$

takie, że dla $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i}\,(u_y v_z - u_z v_y) + \hat{j}\,(u_z v_x - u_x v_z) + \hat{k}\,(u_x v_y - u_y v_x)$$

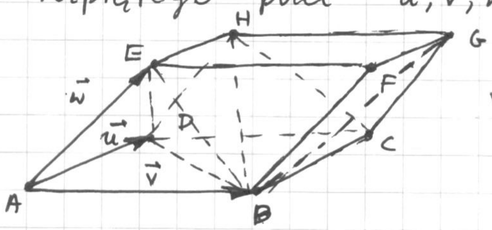
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) \leqslant \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$$

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = 0$

<u>Tw. ( )</u> Liczba $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ określa pole równoległoboku rozpiętego przez $\vec{u}, \vec{v}$.

<u>Def. ( )</u> <u>Iloczynem mieszanym</u> nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, która określa (z dokładnością do znaku) objętość równoległościanu rozpiętego przez $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$



$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Objętość czworościanu AEBD wynosi $\frac{1}{6}V$.

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\vec{w} = \ldots$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

<u>Tw.( )</u> Trzy punkty są współliniowe $\iff [ABC] = 0$

Cztery punkty A, B, C, D są współpłaszczyznowe $\iff$
$\iff V_{ABCD} = 0$

Płaszczyzna w E_3

Def. ( ) Dla ustalonego punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E_3$ oraz wektora $\hat{n} = [A, B, C]$, $\hat{n} \neq 0$, zbiór punktów

$$\pi = \{ P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_0P} \perp \hat{n} \}$$

nazywamy płaszczyzną, a wektor $\hat{n}$ wektorem normalnym płaszczyzny

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \hat{n} = 0$$

1° Równanie normalne płaszczyzny

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [A, B, C] = 0$$

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2° Równanie ogólne płaszczyzny

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

3° Równanie odcinkowe płaszczyzny

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

4° Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $\vec{u}, \vec{v}$ będą liniowo niezależne i $\vec{u} \parallel \pi$, $\vec{v} \parallel \pi$

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + s u_x + t v_x \\ y = y_0 + s u_y + t v_y \\ z = z_0 + s u_z + t v_z \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Def. ( ) Prosta l w E_3 przechodząca przez $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległa do wektora $\vec{v} = [a, b, c]$ nazywamy zbiór punktów

$$P = (x, y, z) = P_0 + \vec{v}t = (x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct),\ t$$

Wektor $\vec{v}$ nazywamy wektorem kierunkowym prostej l.

1° Równanie parametryczne prostej

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2° Równanie kierunkowe prostej

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad a, b, c \neq 0$$

3° Równanie krawędziowe prostej

π_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

π_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

π_1, π_2 nie są równoległe

$$l: \begin{cases} \pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Odległość punktu od płaszczyzny

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Odległość dwóch płaszczyzn równoległych

$\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\pi_2: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_2 = 0$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Odległość punktu P od prostej $l: P_0 + \vec{v}t$

$$d(P, l) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Wzajemne położenie prostych

- równoległe
- przecinające się (w jednym punkcie)
- skośne (nierównoległe i nieprzecinające się)

Odległość między prostymi

Dla $l_1: P_1 + v_1 t$, $l_2: P_2 + v_2 t$

1° Jeśli l_1 i l_2 – skośne to długość najkrótszego odcinka łączącego obie proste wynosi

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|}$$

2° Jeżeli $l_1 \parallel l_2$ to $d(l_1, l_2) = d(P_1, l_2) = d(P_2, l_1)$

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

$$\begin{cases} \pi_1: & A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ \pi_2: & A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Jeżeli układ $(*)$ ma:

1° 0 rozw. to $\pi_1 \parallel \pi_2$ i $\pi_1 \neq \pi_2$

2° ∞ rozw. zależnych od 1 parametru to π_1, π_2 przecinają się wzdłuż prostej

3° ∞ rozw. zależnych od 2 parametrów, to płaszczyzny się pokrywają

Odwzorowanie liniowe

Def. ( ) Niech V, W – przestrzenie wektorowe nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $f: V \mapsto W$ nazywamy liniowym $\Leftrightarrow$

$$1^\circ \quad \forall_{\vec{u},\vec{v} \in V} : \ f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$2^\circ \quad \forall_{\vec{v} \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{K}} : \ f(\alpha \vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

Jeśli $f: V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym to

$1^\circ \quad f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

$2^\circ \quad \forall_{\vec{v} \in V} : f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$

Tw. ( ) Odwzorowanie $f: V \mapsto W$ jest liniowe $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\vec{u},\vec{v} \in V} : \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} : \ f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) = \alpha f(\vec{v}) + \beta f(\vec{u})$$

$$\forall_{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n} : \forall_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{K}} : \ f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{v}_i)$$

Tw. (!) Odwzorowanie f jest określone jednoznacznie przez wartości f na wektorach bazowych z dziedziny (V).

Def. ( ) Niech $f: V \mapsto W$ będzie odwzorowaniem liniowym

a) <u>Jądro odwzorowania</u> to zbiór:

$$\operatorname{Ker} f := \{\vec{v} \in V : \ f(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$$

b) Obraz odwzorowania f (zbiór wartości)

$$\operatorname{Im} f := \{ \vec{w} \in W : \exists_{\vec{v} \in V} : f(\vec{v}) = \vec{w} \}$$

Tw. ( ) Jeśli $f : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym to

1° $\operatorname{Ker} f$ jest podprzestrzenią wektorową V

2° $\operatorname{Im} f$ jest podprzestrzenią wektorową W

Tw. ( ) Jeśli B jest bazą V to

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Lin}\big(f(B)\big), \quad r(f) := \dim\big(\operatorname{Im} f\big)$$

Tw. ( ) Jeśli $f : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym i $\dim V$ jest skończone to

- $\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

Def. ( ) Odwzorowanie liniowe $f : V \mapsto W$ nazywamy:

1° monomorfizmem jeśli jest injektywne

2° epimorfizmem jeśli jest surjektywne ($\operatorname{Im} f = W$)

3° izomorfizmem jeśli jest bijektywne

4° endomorfizmem jeśli $V = W$

5° automorfizmem jeśli jest endo- i izomorfizmem

6° formą liniową jeśli $W = \mathbb{K}$

Tw. ( ) Niech $f: V \mapsto W$ będzie odwzorowaniem liniowym, gdzie $\dim V = n$, $\dim W = m$. Wówczas:

1° f jest <u>epimorfizmem</u> $\iff r(f) = m$

2° następujące warunki są równoważne:

(a) f jest <u>monomorfizmem</u>

(b) $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$

(c) $r(f) = n$

Tw. ( ) Jeśli $f: V \mapsto V$ jest endomorfizmem i $\dim V = n$ to następujące warunki są równoważne

(a) f jest <u>automorfizmem</u>

(b) $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$

(c) $r(f) = n$

Def. ( ) $V \sim W \iff$ istnieje izomorfizm $f: V \mapsto W$

$V \sim W \iff \dim V = \dim W$

Tw. ( ) Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Wówczas struktura $(L(V,W), \mathbb{K}, +, \cdot)$ gdzie

*) $L(V,W) := \{ f: V \mapsto W \mid f \text{ – odwzorowanie liniowe} \}$

*) $+$ to dodawanie odwzorowań

*) $\cdot$ to mnożenie odwzorowań przez skalar z $\mathbb{K}$

jest przestrzenią wektorową.

Tw. ( ) Złożenie odwzorowań liniowych jest odwzorowaniem liniowym.

Macierz odwzorowania liniowego

Def. ( ) Niech $B_V = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, $B_W = \{\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m\}$ będą reperami bazowymi przestrzeni wektorowych odpowiednio V i W (nad $\mathbb{K}$). Niech $f : V \mapsto W$ będzie odwzorowaniem liniowym i

$$f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{l}_1 + a_{21}\vec{l}_2 + \dots \; a_{m1}\vec{l}_m$$

$$\vdots$$

$$f(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{l}_1 + a_{2n}\vec{l}_2 + \cdots \; a_{mn}\vec{l}_m$$

Macierzą odwzorowania f w bazach B_V, B_W nazywamy

$$M_f(B_V, B_W) := \begin{array}{c} \begin{matrix} (e_1) & \cdots & (e_n) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Def. ( ) Niech $f : V \mapsto W$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $B_V = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, $B_W = \{\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m\}$ pewnymi bazami przestrzeni V, W. Oznaczmy $y = f(x)$ dla $x \in V$ i $y \in W$ gdzie

$$x = [x_1, \dots, x_n]_{B_V} \qquad y = [y_1, \dots, y_n]_{B_W}$$

wówczas zachodzi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{B_W} = M_f(B_V, B_W) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{B_V}$$

(macierzowa postać odwzorowania liniowego)

Def. ( ) Macierzą endomorfizmu $f: V \mapsto V$ w bazie B nazywamy macierz $M_f(B,B)$

Tw. ( ) Niech $f: V \mapsto W$ będzie odwzorowaniem liniowym, a B_V, B_W bazami przestrzeni V, W, wówczas

$$r(f) = r\left(M_f(B_V, B_W)\right)$$

Rzędy macierzy odwzorowania f w różnych bazach są równe

$$r\left(M_f(B_V, B_W)\right) = r\left(M_f(B'_V, B'_W)\right)$$

Tw. ( ) Niech $f, g: V \mapsto W$ będą odwzorowaniami liniowymi, a B_V, B_W bazami przestrzeni V, W (nad $\mathbb{K}$), $\alpha \in \mathbb{K}$

1° $M_{f+g}(B_V, B_W) = M_f(B_V, B_W) + M_g(B_V, B_W)$

2° $M_{\alpha f}(B_V, B_W) = \alpha M_f(B_V, B_W)$

Tw. ( ) Niech $f: V \mapsto W$, $g: W \mapsto U$ będą odwzorowaniami liniowymi, a B_V, B_W, B_U bazami przestrzeni V, W, U

$$M_{g \circ f}(B_V, B_U) = M_g(B_W, B_U) \cdot M_f(B_V, B_W)$$

Tw. ( ) Niech $f: V \mapsto V$ będzie endomorfizmem, a B, B' pewnymi bazami przestrzeni V.

1° f jest automorfizmem $\iff \det\left(M_f(B, B')\right) \neq 0$

2° f jest automorfizmem $\Rightarrow M_{f^{-1}}(B, B') = \left(M_f(B, B')\right)^{-1}$

__Def. (Macierz przejścia)__ $P_{B\to B'}$ nazywamy macierzą przejścia ~~od~~ bazy B do bazy B' przestrzeni wektorowej V $\iff$

$$P_{B\to B'} = M_{Id}(B', B)$$

gdzie Id oznacza odwzorowanie identycznościowe $Id: V \mapsto V$, $Id(x) = x$

1° Macierz $P_{B\to B'}$ jest macierzą nieosobliwą $(\det P \neq 0)$ i zachodzi $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$

2° Jeśli X, X' są kolumnami współrzędnych wektora $x \in V$ odpowiednio w B, B' to zachodzi

$$X' = (P_{B\to B'})^{-1} X \qquad X = P_{B\to B'} X'$$

__Tw. ( )__ Niech $f: V \mapsto W$ będzie odwzorowaniem liniowym, a B_V, B_V', B_W, B_W' bazami przestrzeni V, W. Wtedy

- $M_f(B_V', B_W') = (P_{B_W\to B_W'})^{-1} \cdot M_f(B_V, B_W) \cdot P_{B_V\to B_V'}$

Jeśli f jest endomorfizmem to

- $M_f(B_V', B_V') = (P_{B_V\to B_V'})^{-1} \cdot M_f(B_V, B_V) \cdot P_{B_V\to B_V'}$

__Def. ( )__ 1° Macierze A, B __tego samego wymiaru__ nazywamy __równoważnymi__ $\iff r(A) = r(B)$

$$\exists_{P,Q}: \det(P) \neq 0 \wedge \det(Q) \neq 0 \wedge B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

2° Macierze kwadratowe A, B __tego samego wymiaru__ nazywamy __podobnymi__ $\iff r(A) = r(B) \iff$

$$\exists_P: \det(P) \neq 0 \wedge B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

A, B – podobne $\Rightarrow \det A = \det B$

Tw. ( ) Dwie macierze tego samego odwzorowania liniowego f względem różnych baz są równoważne.

Macierz dowolnego endomorfizmu jest podobna do każdej macierzy tego endomorfizmu w innej bazie.

Wartości i wektory własne

Def. ( ) Niech $f: V \mapsto V$ będzie endomorfizmem. Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ nazywamy wartością własną (eigenvalue) tego endomorfizmu $\Leftrightarrow$

$$\exists_{\vec{v} \in V} : f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

Każdy wektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ spełniający powyższą równość nazywamy wektorem własnym (eigenvector) endomorfizmu f odpowiadającym eigenvalue λ.

Zbiór wszystkich wartości własnych endomorfizmu f nazywamy widmem f.

Tw. ( ) Jeśli $f: V \mapsto V$ jest endomorfizmem, a λ jego eigenvalue to zbiór

$$V_\lambda := \{ \vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \}$$

stanowi podprzestrzeń przestrzeni V.

- V_λ zawiera wektor $\vec{0}$ i eigenvectors odpowiadające λ.
- V_λ nazywamy podprzestrzenią własną
- $\dim V_\lambda \geq 1$

Tw. ( ) Niech $M_f(B,B)$ będzie macierzą endomorfizmu $f: V \mapsto V$ w bazie B. Wówczas

1° $\lambda \in \mathbb{K}$ jest wartością własną f $\iff$

$$\det\left(M_f(B,B) - \lambda I\right) = 0$$

2° wektor $\vec{v} \in V$ jest eigenvector endomorfizmu f odpowiadającym λ $\iff$

jego współrzędne w bazie B tj. $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]_B$ są niezerowym rozwiązaniem układu

$$(M_f(B,B) - \lambda I)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$

Def. (wielomianu charakterystycznego) Niech $f: V \mapsto V$ będzie endomorfizmem $(\dim V = n)$, a M jego macierzą w dowolnej bazie. Wielomian $w(\lambda)$

$$w(\lambda) := \det(M - \lambda I)$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f.

- Wartości własne endomorfizmu f odpowiadają pierwiastkom wielomianu $w(\lambda)$

Def. ( ) Endomorfizm $f: V \mapsto V$ nazywamy <u>diagonalizowalnym</u> $\iff$ istnieje baza B, w której macierz endomorfizmu $M_f(B,B)$ jest diagonalna.

Tw. ( ) Endomorfizm $f: V \mapsto V$ jest diagonalizowalny $\iff$ istnieje baza B utworzona z wektorów własnych endomorfizmu f.

Tw. ( ) Jeśli endomorfizm $f: V \mapsto V$ $(\dim V = n)$ ma n różnych wartości własnych to jest diagonalizowalny.

Def. ( ) Niech $w(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $f: V \mapsto V$, a λ_0 pewnym pierwiastkiem $w(\lambda)$ o krotności k_{λ_0}.

- $\dim V_{\lambda_0}$ nazywamy <u>krotnością geometryczną λ_0</u>
- k_{λ_0} nazywamy <u>krotnością algebraiczną λ_0</u>
- $1 \leq \dim V_{\lambda_0} \leq k_{\lambda_0}$

Tw. ( ) Endomorfizm $f: V \mapsto V$ jest diagonalizowalny $\iff$

- $w(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{k_p}$
- $k_1 + \dots + k_p = \dim V$
- $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$
- $\forall_{i \in \{1, \dots, p\}} \dim V_{\lambda_i} = k_i$

kinda important for CM, EM, QM

$\boxed{\text{Diagonalizacja macierzy}}$

Def. ( ) Macierz A jest diagonalizowalna $\Leftrightarrow$ istnieją macierze D, P ($\det P \neq 0$) takie, że

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Def. ( ) Wartością własną macierzy kwadratowej A nazywamy każdy skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ spełniający

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ nazywamy każdy niezerowy wektor $\vec{v}$ spełniający

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \mathbf{0}$$

(!!!) Analogiczne do twierdzeń o wartościach i wektorach własnych oraz diagonalizowalności endomorfizmów są również prawdziwe dla macierzy.

Diagonalizacja jest przydatna przy potęgowaniu macierzy. Istotnie niech A będzie macierzą diagonalizowalną

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \implies A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A^n = (P \cdot D \cdot P^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1} \cdots}_{I}\underbrace{P}_{I}DP^{-1} =$$

$$= P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

Macierz diagonalna D ma postać

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$