ANALIZA MATEMATYCZNA I

<u>Ciągi liczbowe</u>

Def. ( ) ciąg to funkcja $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

$\{1, 2, \dots, n\}$ — zbiór n elementowy

$(1, 2, \dots, n)$ — ciąg n wyrazowy

- ciąg $(a_n) \nearrow \overset{def}{\iff} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_{n+1} > a_n$
- ciąg $(a_n) \searrow \overset{def}{\iff} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_{n+1} < a_n$
- ciąg (a_n) jest ograniczony z góry $\overset{def}{\iff} \exists_{M \in \mathbb{R}} : \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n \leq M$
- ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu $\overset{def}{\iff} \exists_{m \in \mathbb{R}} : \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n \geq m$
- ciąg (a_n) jest ograniczony $\overset{def}{\iff}$ jest ograniczony z góry i z dołu
- ciąg (a_n) — arytmetyczny $\overset{def}{\iff} \exists_{r \in \mathbb{R}} : \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_{n+1} = a_n + r$

  — $a_n = a_1 + (n-1)r$

  — $S_n = \sum_{\alpha = p}^{n} a_\alpha = \frac{a_p + a_n}{2} (n - p + 1)$

  — $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$

- ciąg (a_n) — geometryczny $\overset{def}{\iff} \exists_{q \in \mathbb{R}} : \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_{n+1} = q \cdot a_n$

  — $a_n = a_1 q^{n-1}$

  — $S_n = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \overset{q=1}{n a_1}, \quad \overset{q=0}{a_1}$

  — $a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1}$

  — $(a_n) \nearrow \iff \begin{cases} q \in (0,1) \ \wedge \ a_1 < 0 \\ q > 1 \ \wedge \ a_1 > 0 \end{cases}$

- $(a_n) \searrow \iff \begin{cases} q \in (0;1) \quad \wedge \quad a_1 > 0 \\ q > 1 \quad \wedge \quad a_1 < 0 \end{cases}$

- (a_n) – stały $\iff q = 1 \vee a_1 = 0$

Def. ( ) Cauchy'ego granicy ciągu (właściwej)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \overset{def}{\iff} \forall_{\varepsilon>0} : \exists_{N\in\mathbb{N}} : \forall_{n>N} : |a_n - g| < \varepsilon$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu (tj. wszystkie wyrazy ciągu poza skończoną ich ilością) znajdują się w otoczeniu ε liczby g.

Granica niewłaściwa

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \overset{def}{\iff} \forall_M : \exists_N : \forall_{n>N} \ a_n > M$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{def}{\iff} \forall_m : \exists_N : \forall_{n>N} \ a_n < m$

Symbole nieoznaczone $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [1^\infty], [0 \cdot \infty], [0^0], [\infty^0]$

Ciąg, który nie ma granicy nazywamy niezbieżnym.

Twierdzenia

1° (o jednoznaczności granicy) Ciąg ma najwyżej jedną granicę właściwą.

2° (o zachowaniu słabej nierówności) Jeśli ciąg ma granicę właściwą g i jest ograniczony z góry (z dołu) przez M to $g \le M$ ($g \ge M$)

2°' (o ograniczoności ciągu zbieżnego) Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

3° $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

4° $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

5° $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

6° $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

7° $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

8° Jeśli $(a_n), (b_n)$ – zbieżne odpowiednio do a i b to

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, o ile $\forall_n\, b_n \neq 0$ oraz $b \neq 0$

9° (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny do granicy właściwej.

10° (o trzech ciągach)

Jeśli $\exists_{N\in\mathbb{N}} : \forall_{n\geq N}\ a_n \geq b_n \geq c_n$ oraz

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$

11° (o ciągu ograniczonym i zbieżnym do 0)

Jeśli (a_n) – ograniczony i (b_n): $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ to

$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

Granice specjalne

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}$

Podciągi

Def. ( ) Niech $n_k : \overset{\in\mathbb{N}}{k} \mapsto \overset{\in\mathbb{N}}{n_k}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wtedy ciąg (a_{n_k}) nazywamy podciągiem ciągu (a_n).

Twierdzenia

1° Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ to dla każdego podciągu (a_{n_k})

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g.$$

2° Jeśli istnieją dwa podciągi (a_{n_k}) i (a_{n_l}) takie, że

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim\limits_{l\to\infty} a_{n_l}$ to ciąg (a_n) nie jest zbieżny.

3° (Bolzano – Weierstrassa) Jeśli (a_n) jest ograniczony, to ma podciąg (a_{n_k}) zbieżny do granicy właściwej.

Def. ( ) Granicą górną ciągu (a_n) nazywamy element największy ~~[illegible]~~ w zbiorze granic właściwych wszystkich podciągów tego ciągu

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{g : g - \text{granica } (a_{n_k})\}$$

Granica dolna ciągu (a_n) nazywamy element najmniejszy ~~największy~~ w zbiorze granic właściwych wszystkich podciągów tego ciągu.

Dowód, że ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący. Oczywiście wszystkie wyrazy (a_n) są dodatnie. Rozpatrzmy stosunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Z nierówności Bernoulliego: $\forall_{x>-1} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} \geq a_n \qquad \#$$

Funkcje

Def. ( ) Funkcja to „przyporządkowanie", w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden el. $y \in Y$.

$$f : X \mapsto Y$$

- Dziedzina naturalna — zbiór tych argumentów x, dla których da się obliczyć $f(x)$
- Przeciwdziedzina $\quad \mathbb{C}_f := \{ f(x) : x \in \mathbb{D}_f \}$
- Funkcją odwrotną do $f: X \mapsto Y$ nazywamy funkcję

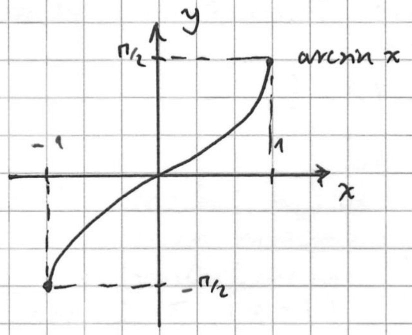
$$f^{-1}: Y \mapsto X : \quad \forall_{y \in Y} \; f^{-1}(y) = x \Rightarrow f(x) = y$$

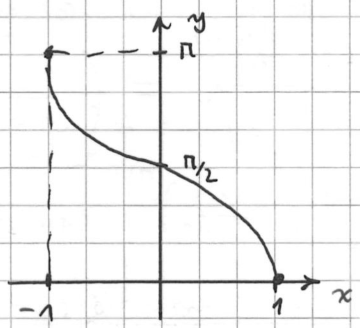
Tylko f. bijektywne posiadają f. odwrotną

! złożenie, suma, iloczyn, iloraz dowolnej skończonej liczby funkcji elementarnych jest f. elementarną.

Funkcje cyklometryczne

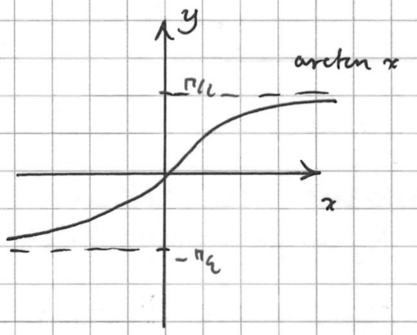
1° $f = \arcsin x$ $\qquad D_f = [-1; 1]$ $\qquad C_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

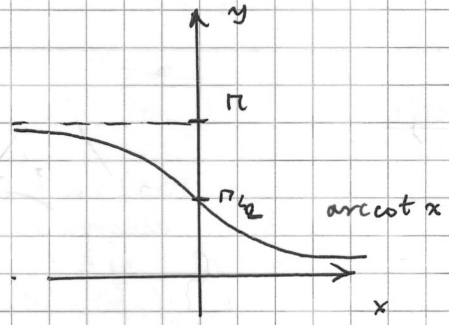




2° $f(x) = \arccos x$ $\qquad D_f = [-1; 1]$ $\qquad C_f = [0; \pi]$

3° $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$ $\qquad C_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$





- $\forall_{x \in [-1;1]} \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
- $\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

Granica funkcji

Def. ( ) Otoczeniem punktu x_0 nazywamy dowolny przedział $(x_0 - r; x_0 + r)$ $(r > 0)$ i oznaczamy go $U(x_0)$

Def. ( ) Sąsiedztwem punktu x_0 nazywamy dowolny przedział $(x_0 - r; x_0) \cup (x_0; x_0 + r)$ $(r > 0)$ i oznaczamy go $S(x_0)$. Sąsiedztwo prawo- i lewo-stronne oznaczamy $S^+(x_0)$ i $S^-(x_0)$

Def. ( ) Heinego granicy właściwej f. w punkcie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \overset{def}{\iff} \forall_{\substack{(a_n) \\ a_n \neq x_0}} : (a_n) \to x_0 \Rightarrow (f(a_n)) \to g$$

Def. ( ) Granic jednostronnych

- $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \overset{def}{\iff} \forall_{\substack{(a_n) \\ a_n > x_0}} : (a_n) \to x_0 \Rightarrow (f(a_n)) \to g$$
- $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \overset{def}{\iff} \forall_{\substack{(a_n) \\ a_n < x_0}} : (a_n) \to x_0 \Rightarrow (f(a_n)) \to g$$

TW. Warunek konieczny i wystarczający na istnienie granicy właściwej f. w punkcie

Jeśli w punkcie x_0 pewnej $f(x)$ istnieje granica prawo- i lewostronna i granice te są sobie równe to $f(x)$ posiada w tym punkcie granicę

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Granice specjalne

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a > 0)$$
- $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
- Jeśli $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ to $\lim_{x \to x_0} \left(1 \pm \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^{\pm 1}$

Tw. (o granicy funkcji złożonej)

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ i $\forall_{x \in S(x_0)}\ f(x) \neq y_0$ oraz

$\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$ to $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0$

Ciągłość funkcji

Def. ( ) $f(x)$ jest ciągła w $x_0 \in D_f \iff \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $(a;b)$ jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (a;b)$

Tw. Suma, różnica, iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ funkcji ciągłych w x_0 jest ciągły o ile $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0.

Jeśli $f(x)$ ciągła w x_0 i $g(y)$ ciągła w $y_0 = f(x_0)$ to złożenie $g \circ f = g(f(x))$ jest ciągłe w x_0.

Wszystkie f. elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Własności funkcji ciągłych

Tw. (własność Darboux)

$C(A)$ — zbiór wszystkich funkcji ciągłych w zbiorze A.

Jeśli $f(x) \in C([a;b])$ i $f(a) \neq f(b)$ to $f(x)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[f(a);f(b)]$

Tw. (Weierstrassa o osiąganiu kresów)

Jeżeli $f(x) \in C([a;b])$, to istnieje:

1. $x_1 \in [a;b]$: $f(x_1)$ jest wartością najmniejszą funkcji f w przedziale $[a;b]$

2. $x_2 \in [a;b]$: $f(x_2)$ jest wartością największą funkcji f w przedziale $[a;b]$

Pochodna funkcji w punkcie

Def. ( ) Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 definiujemy jako

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ — iloraz różnicowy w punkcie x_0 o przyroście h

Def. ( ) Pochodnych jednostronnych

- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

WKW. (na istnienie pochodnej w punkcie)

Funkcja $f(x)$ ma pochodną w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$ istnieją pochodne lewo- i prawostronne $f(x)$ w tym punkcie i są sobie równe.

Tw. Jeśli $f(x)$ jest różniczkowalna w x_0 to jest ciągła w x_0.

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta między styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ a osią OX.

Równanie stycznej do wykresu $f(x)$ w x_0

$$s(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

Twierdzenia

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $[f(g(x))]' = f'(g) \cdot g'(x)$
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

- Pochodne funkcji elementarnych są f. elementarnymi

Def. ( ) n-ta pochodna funkcji

Jeśli istnieje pochodna rzędu $(n-1)$-go funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 to pochodną rzędu n definiujemy jako

$$\begin{cases} f^{(1)}(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x_0)\right)' = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

$D^n(A)$ — zbiór funkcji n-krotnie różniczkowalnych w A

$C^n(A)$ — zbiór funkcji n-krotnie różniczkowalnych w A i takich, że $f^{(n)}(x)$ jest ciągła w A.

Twierdzenia o wartości średniej rachunku różniczkowego

1° **Tw. Rolle'a**

Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą:

1. ciągłą w przedziale $[a;b]$
2. różniczkowalna w przedziale $(a;b)$

$(a \neq b)$

wówczas jeśli $f(a) = f(b)$ to $\exists_{c \in (a;b)} : f'(c) = 0$

2° <u>Tw. Lagrange'a</u>

Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą:

1. ciągłą w przedziale $[a;b]$
2. różniczkowalną w przedziale $(a;b)$

$(b \neq a)$

wówczas $\exists_{c \in (a;b)} : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

3° <u>Tw. Cauchy'ego</u>

Niech $f(x)$, $g(x)$ będą funkcjami rzeczywistymi:

1. ciągłymi w przedziale $[a;b]$
2. różniczkowalnymi w przedziale $(a;b)$

wówczas $\exists_{c \in (a;b)} : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

<u>Reguła de L'Hospitala</u>

Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w $S(x_0)$ oraz $\forall_{x \in S(x_0)}$ $g(x) \neq 0 \wedge g'(x) \neq 0$ oraz zachodzi jedna z możliwości

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ lub $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty = \lim_{x \to x_0} f(x)$

to (o ile granica istnieje)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Tw. Fermata o zerowaniu pochodnej</u>

Niech $f(x)$ – różniczkowalna w $x_0 \in (a;b)$ oraz
$f(x_0) = \max\{f : (a;b)\} \vee f(x_0) = \min\{-\text{"}-\} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$

Tw. o monotoniczności funkcji różniczkowalnej

Niech $f(x)$ będzie różniczkowalna w $(a;b)$, wówczas

- $\forall_{x \in (a;b)} \; f'(x) \geq 0 \implies f(x) \nearrow$ w $(a;b)$
- $\forall_{x \in (a;b)} \; f'(x) \leq 0 \implies f(x) \searrow$ w $(a;b)$

przy czym równość zachodzi w skończonej ilości punktów.

Tw. o ekstremum funkcji różniczkowalnej

Niech $f(x)$ będzie różniczkowalna w ~~$(a;b)$~~ pewnym otoczeniu punktu x_0.

Jeśli $f'(x_0) = 0 \wedge f'(x)$ zmienia znak w $x_0 \implies$
$\implies f(x_0)$ jest ekstremum lokalnym funkcji $f(x)$

Wzór Taylora

Niech funkcja $f(x)$ będzie n-krotnie różniczkowalna w przedziale $[a;b]$ oraz niech jej kolejne pochodne będą ciągłe w tym przedziale, wówczas

$$\exists_{c \in (x_0, x)} : f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x_0, x)$$

gdzie $R_n(x_0, x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$ — reszta Lagrange'a

W szczególności dla $x_0 = 0$ otrzymujemy wzór Maclaurina

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(0, x)$$

Z powyższego otrzymujemy wzór przybliżony na $f(x)$ wokół x_0

$$f(x) \overset{x=x_0}{\approx} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

przy czym błąd tego oszacowania jest równy $|R_n(x_0,x)|$

<u>Postać Cauchy'ego reszty Lagrange'a</u>

$$\exists_{\theta \in (0;1)}: \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n$$

<u>Asymptoty</u>

- Jeśli $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ to $y=a$ jest asymptotą poziomą funkcji $f(x)$ odp. w $\pm\infty$

- Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ to $x = x_0$ jest pionową asymptotą prawostronną.

  Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ to $x = x_0$ jest pionową asymptotą lewostronną

  Jeśli $x = x_0$ jest asymptotą prawo- i lewostronną to nazywamy ją asymptotą obustronną.

  Jeśli $f(x)$ jest ciągła w x_0 to $x = x_0$ nie może być asymptotą pionową.

- Jeśli $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \wedge \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$ to

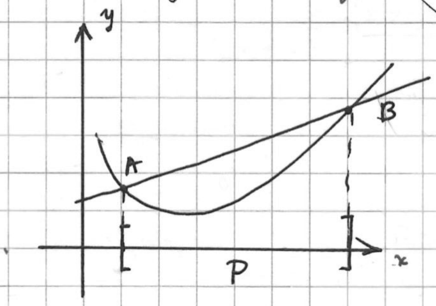
  prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną $f(x)$ odpowiednio w $\pm\infty$.

Wypukłość funkcji

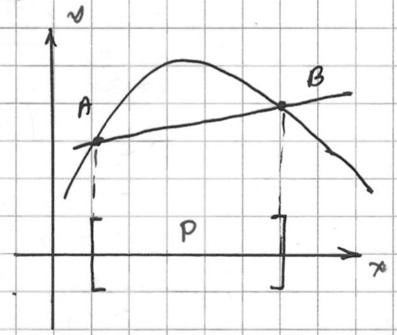
Def. ( ) Funkcji wypukłej. Funkcję $f(x)$ określoną w przedziale P nazywamy wypukłą, jeśli dla dowolnych punktów $x, y \in P$ i dowolnej liczby $t \in (0;1)$ zachodzi

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leq t\, f(x) + (1-t)\, f(y)$$

Jeśli funkcja $-f$ jest wypukła to mówimy, że funkcja f jest wklęsła.



f. wypukła w P



f. wklęsła w P

Def. ( ) Punktu przegięcia. Jeśli z jednej strony pewnego punktu x_0 funkcja f jest wypukła, a z drugiej wklęsła to x_0 nazywamy punktem przegięcia.

Tw. (o wypukłości f. różniczkowalnej)

Niech $f(x)$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w $(a;b)$:

- $\forall_{x \in (a;b)} \; f''(x) \geq 0 \implies$ f. jest wypukła w $(a;b)$
- $\forall_{x \in (a;b)} \; f''(x) \leq 0 \implies$ f. jest wklęsła w $(a;b)$

przy czym równość zachodzi w skończonej ilości punktów.

Tw. o punkcie przegięcia f. różniczkowalnej

Niech $f(x)$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0.

Jeśli $f''(x_0) = 0 \wedge f''(x)$ zmienia znak w x_0 to x_0 jest punktem przegięcia funkcji $f(x)$.

Nierówność Jensena

Niech f będzie funkcją wypukłą w przedziale P. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0;1]$ i $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Wówczas dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in P$ zachodzi

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

Dla $f(x)$ wklęsłej w P zachodzi nierówność w drugą stronę.

RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Def. ( ) Funkcji pierwotnej. Niech $f: I \mapsto \mathbb{R}$, funkcję $F: I \mapsto \mathbb{R}$ taką, że $\forall_{x \in I}\ F'(x) = f(x)$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ ~~na~~ w I.

Jeśli f ma funkcję pierwotną to mówimy, że f jest całkowalna w sensie Newtona.

Def. ( ) Całki Newtona. Niech f – całkowalna w sensie Newtona wówczas

$$\int f(x)\,dx := F(x) + C \quad \text{gdzie}$$

$F(x)$ – funkcja pierwotna f, C – dowolna stała.

Całka oznaczona Newtona

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)$$

Tw. ( ) Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w I to f jest całkowalna w sensie Newtona.

Uwaga! Całka z funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną.

Całki funkcji elementarnych

- $\int 0 \, dx = C$
- $\int a \, dx = ax + C$
- $\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$
- Jeśli f, g – całkowalne

  $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f \, dx \pm \int g \, dx$

  $\int af \, dx = a \int f \, dx$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$

Tw. ( ) Całkowanie przez części. Niech $u(x), v(x)$ będą ciągłe w przedziale I. Wówczas

$$\int u \frac{dv}{dx}\, dx = u v - \int \frac{du}{dx} v\, dx$$

(!!!) $1 = (x)'$

Przez części całkujemy funkcje postaci

TI: $W(x) \cos x$, $W(x) a^x$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem

TII: $W(x) \ln(x)$, $W(x) \arcsin(x)$, $W(x) \arccos(x)$, $W(x) \operatorname{arctan}(x)$, $W(x) \operatorname{arccot}(x)$

TIII: $e^x \sin(x)$, $\sin^2 x$

Tw. ( ) Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\, dx = \int f(t(x)) \frac{dx}{dt}\, dt$$

gdzie $f: J \mapsto \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Newtona w J i $t: I \mapsto J$ jest ciągła.

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$, gdzie P, Q — wielomiany

Def. ( ) Funkcję wymierną f nazywamy właściwą $\Leftrightarrow$

$$\deg\{P(x)\} < \deg\{Q(x)\}$$

(!!!) Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy pełnego wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

$\frac{a_k}{(x-x_0)^k}$ — ułamek prosty I rodzaju

$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}$ — ułamek prosty II rodzaju

- całkowanie ułamków prostych I rodzaju

$$\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = \ln|x-x_0| + const.$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx = \left| \begin{matrix} t = x-x_0 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{-1}{n-1}\,\frac{1}{t^{n-1}} + const.$$

- całkowanie ułamków prostych II rodzaju

- $$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{\frac{(x-a)^2}{b^2}+1} = \left| \begin{matrix} t = \frac{x-a}{b} \\ dt = \frac{dx}{b} \end{matrix} \right| = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

! $(p^2-4q<0)$

$$= \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + const.$$

- $$\int \frac{x+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \int \frac{\alpha\,dx}{(x^2+px+q)^n}$$

- $$\underbrace{\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}}_{I_n} = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^n}\,dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = I_{n-1} - \int t\left(\frac{1}{2(1-n)}\,\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\right)'dt$$

$$= I_{n-1} - \left(\frac{t}{2(1-n)(1+t^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}\,dt\right) =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2(1-n)}\,I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(1+t^2)^{n-1}}$$

Całkowanie funkcji niewymiernych

Def. ( ) 1° Jednomian dwóch zmiennych x, y: $a x^n y^m$

2° Wielomian dwóch zmiennych $W(x,y)$ to dowolna skończona suma jednomianów dwóch zmiennych

3° Funkcja wymierna dwóch zmiennych nazywamy iloraz wielomianów dwóch zmiennych

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad (R - \text{"rational"})$$

I. Podstawienie Eulera

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \left| \overbrace{\begin{array}{l} \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x \\ x = \dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t} \\ dx = \left(\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t}\right)' dt \end{array}}^{\text{podstawienie Eulera}} \right|$$

$$a \geqslant 0$$

II Metoda współczynników nieoznaczonych (Lagrange'a)

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

gdzie $P_{n-1}(x)$ jest pewnym wielomianem rzeczywistym stopnia $n-1$. Współczynnik λ obliczamy przez różniczkowanie

$$\frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + P_{n-1}(x)\,\frac{1}{2}\,\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$W_n(x) = P'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{1}{2}P_{n-1}(x)\,(2ax+b) + \lambda$$

Przez porównanie współczynników obu wielomianów wyznaczamy λ.

III $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-x_0)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left|\begin{array}{l} t = \frac{1}{x-x_0} \\ x = x_0 + \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array}\right| \longrightarrow$ metoda współczynników Lagrange'a

IV $\displaystyle\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right] dx = \left|\begin{array}{l} \frac{ax+b}{cx+d} = t^s \\ \\ s = NWW(q_1, \dots, q_n) \end{array}\right|$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

I $\displaystyle\int \sin^n x \cos^m x \, dx$

II $\displaystyle\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = \int \left[\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)\right] dx$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \int \left[\cos((b-a)x) - \cos((b+a)x)\right] dx$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \int \left[\cos((b-a)x) + \cos((b+a)x)\right] dx$$

III Podstawienie uniwersalne

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|$$

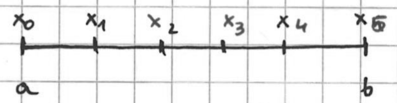
CAŁKA RIEMANNA

Def. ( ) Niech $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie ograniczona. Tworzymy ciąg podziałów przedziału $[a;b]$ postaci

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

gdzie x_i jest punktem podziału.

$$\Delta x_i := x_{i} - x_{i-1} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$



$$\delta_n := \max \{ \Delta x_i ,\ i = 1, \ldots, n \}$$

Ciąg podziałów nazwiemy normalnym $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

W każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ wybieramy punkt pośredni $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Suma całkowa : $S_n := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$

Jeśli dla każdego normalnego ciągu podziałów i dowolnego wyboru punktów pośrednich istnieje $\lim_{n\to\infty} S_n$ która nie zależy od danego wyboru, to granicę tę nazywamy całką Riemanna funkcji f w przedziale $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

Tw. ( ) Funkcja ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym $[a;b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna.

Def. ( ) ~~Zbiór Riemanna~~

Zbioru miary Riemanna równej 0

$A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem miary $0 \iff$

$$\forall_{\varepsilon > 0} : \exists_{\substack{[a_i;b_i] \\ i \in \{1,\dots,n\}}} : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} [a_i;b_i] \wedge \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leq \varepsilon$$

Tw. ( ) Niech f będzie całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a;b]$.

$$A := \{x \in [a;b] : f(x) \neq g(x)\}$$

Jeśli A jest miary 0, to $g(x)$ jest całkowalna w $[a;b]$ oraz

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Tw. ( ) Własności funkcji całkowalnych w sensie Riemanna

Niech f, g będą całkowalne w $[a;b]$

1) $$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

2) $f \cdot g$ jest całkowalna w $[a;b]$

3) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Tw. ( ) Twierdzenia o wartości średniej

1° Niech f będzie całkowalna w $[a;b]$. Wówczas

jeśli $\exists_{m,M} : \forall_{x \in [a;b]} \ m \leq f(x) \leq M$ to

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

2° Niech f będzie ciągła w $[a,b]$, wówczas

$$\exists_{c \in [a;b]} : \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Def. ( ) Funkcją górnej granicy całkowania nazywamy funkcję $\phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

Tw. ( ) Niech f — ciągła w $[a;b]$ $\Rightarrow$ $\phi(x)$ — ciągła w $[a;b]$

Tw. ( ) $\phi(x)$ różniczkowalna w $x_0 \in [a;b]$ $\phi'(x_0) = f(x_0)$

Tw. ( ) Newtona – Leibniza

Niech $f(x)$ będzie ciągła ~~...~~ w $[a;b]$, wówczas

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{całka Riemanna}} = \overbrace{F(b) - F(a)}^{\text{całka Newtona}}$$

funkcja pierwotna

Całki niewłaściwe

1° Jeśli f jest ciągła w $[a;b)$ to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a;b)} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

Jeśli powyższa granica istnieje to mówimy, że powyższa całka jest zbieżna.

2° Jeśli f jest ciągła w $(a;b]$ to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

3° Jeśli f jest ciągła w $(a;b)$ to wybieramy $x_0 \in (a;b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to b^-} \int_{x_0}^\beta f(x)\,dx$$

4° $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\beta \to \infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to \infty} \int_{x_0}^\beta f(x)\,dx$$

Tw. ( ) O zbieżności całek

Jeśli $f(x), g(x)$ — ciągłe w $[a;b)$ i

$\forall_{x \in [a;b)} \, 0 \leq f(x) \leq g(x)$ to ~~zbie~~

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ jest zbieżna} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ jest zbieżna}$$

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK

- Współrzędne biegunowe (r, φ)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \qquad r \geq 0$$

1° Pole obszaru ograniczonego krzywą $r(\varphi)$, $r(\varphi) \geq 0$

$$|D| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Krzywa zadana parametrycznie $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

2° Pole obszaru ograniczonego krzywą zadaną parametrycznie

$\cancel{x}y(t) \geq 0 \qquad x'(t) > 0$

$$|D| = \int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt$$

Długość krzywej

Niech $L: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$ będzie krzywą zadaną parametrycznie.

Def. ( ) Krzywą L nazywamy łukiem gładkim $\Leftrightarrow$

1° $x(t), y(t)$ jest ciągła w $[\alpha, \beta]$

2° w każdym punkcie krzywej istnieje styczna

Długość łuku gładkiego wynosi

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$|L| = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

$$|L| = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$$

Objętość bryły obrotowej

Niech $f(x) = y$ będzie ciągła w $[a;b]$.

Niech V oznacza bryłę powstałą przez obrót krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX.

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Jeśli krzywa jest zadana parametrycznie $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$

gdzie $y(t)$ – ciągła w $[\alpha; \beta]$, $x'(t) > 0$

$$|V| = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\, x'(t)\, dt$$

<u>Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej</u>

Niech $y = f(x)$ będzie ciągła w $[a; b]$ i $f(x) \geq 0$

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{dy^2 + dx^2} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Jeśli krzywa $(x(t), y(t))$ jest gładka i $y(t) \geq 0$ to

$$|S| = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

PRZESTRZENIE METRYCZNE

<u>Def. (Metryki)</u> Niech $X \neq \emptyset$. <u>Metryką</u> d w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $d: X \times X \mapsto \mathbb{R}$ spełniającą następujące aksjomaty

1° $\forall_{(x,y) \in X^2}$: $d(x,y) \geq 0$

2° $\forall_{(x,y) \in X^2}$: $d(x,y) = d(y,x)$ (symetria)

3° $\forall_{x,y,z \in X^2}$: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (nierówność Δ)

4° $\forall_{(x,y) \in X^2}$: $d(x,y) = 0 \iff$ ~~(x,y)~~ $x = y$

Parę $(X, d(X))$ nazywamy <u>przestrzenią metryczną</u>.

Def. (Kuli) Niech $(X, d(X))$ będzie przestrzenią metryczną, $x_0 \in X$, $r > 0$. Kulą o środku x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

kula otwarta $\rightarrow K(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$

Def. ( ) Niech $(X, d(X))$ — przestrzeń metryczna. Zbiór $A \subset X$ nazywamy ograniczonym $\iff$

$$\exists_{x_0 \in X} \exists_{r>0} : A \subset K(x_0, r)$$

Def. ( ) Topologii w zbiorze. Topologię τ w zbiorze X nazywamy dowolną rodzinę zbiorów $A_1, \dots, A_N \subset X$ spełniającą

1° $\emptyset \in \tau \wedge X \in \tau$

2° $\forall_{i \in I} A_i \in \tau \Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \in \tau$

3° $\forall_{i=1,\dots,n} A_i \in \tau \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \in \tau$

Zbiory A należące do τ nazywamy otwartymi.

Def. ( ) Niech $(X, d(X))$ — przestrzeń metryczna. Zbiór $U \subset X$ nazywamy zbiorem otwartym w (X, d) $\iff$

$$U = \emptyset \vee \forall_{x_0 \in U} : \exists_{r>0} K(x_0, r) \subset U$$

$\iff$ jest to taki zbiór, który wraz z każdym swoim punktem zawiera pewną kulę otwartą o środku w tym punkcie

Tw. ( ) Niech $(X, d(X))$ — przestrzeń metryczna. Zbiór

$$\tau_d := \{ U \subset X : U \text{ jest zbiorem otwartym w } (X,d) \}$$

jest <u>topologią w X indukowaną przez metrykę d</u>

Def. ( ) Niech (X, τ) będzie <u>przestrzenią topologiczną</u>.

Wnętrzem zbioru $A \subset X$ $(\operatorname{int} A)$ nazywamy największy (ze względu na relację $\subset$) zbiór otwarty zawarty w A.

Def. ( ) <u>Otoczeniem</u> punktu $x_0 \in X$ nazywamy dowolny zbiór otwarty zawierający x_0.

$\vartheta(x_0) \cong ot(x_0)$ — zbiór wszystkich otoczeń x_0

Def. ( ) Zbiór $B \subset X$ nazywamy <u>domkniętym</u> $\Leftrightarrow$ $X \setminus B$ jest zbiorem otwartym.

Tw. ( ) Własności zbiorów domkniętych (analogicznie do aksjomatów przestrzeni topologicznej)

1° $\emptyset, X$ — domknięte

skończone

2° $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} A_i$ — domknięty $\Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I}^{n} A_i \right)$ — domknięty

3° $\forall_{i \in I} A_i$ — domknięty $\Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$ — domknięty

Def. ( ) <u>Domknięciem</u> zbioru $A \subset X$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający zbiór A. (Ozn. $\bar{A}$)

Def. ( ) Punkt $x_0 \in X$ nazywamy <u>punktem brzegowym</u> zbioru $A \subset X \iff$

$$\forall_{r>0} \quad K(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad K(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

<u>Brzegiem</u> ∂A zbioru A nazywamy zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru A.

Def. ( ) Punkt $x_0 \in X$ nazywamy <u>punktem skupienia</u> zbioru $A \subset X \iff$

$$\forall_{r>0} \quad \left(K(x_0, r) \setminus \{x_0\}\right) \cap A \neq \emptyset$$

Tw. ( ) A jest zbiorem domkniętym $\iff$ gdy A zawiera zawiera wszystkie swoje punkty skupienia

---

Def. ( ) <u>Granicy ciągu</u>. Niech $(X, d(X))$ będzie przestrzenią metryczną. Ciąg (a_n) zdefiniujmy jako odwzorowanie

$$(a_n) : \mathbb{N}_+ \mapsto X$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g \iff \lim_{n \to \infty} d(a_n, g) = 0$$

Def. ( ) <u>jednostajnej równoważności metryk</u>. Niech (X, d_1), (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi.

Metryki d_1, d_2 nazywamy <u>jednostajnie równoważnymi</u> w $X \iff$

$$\exists_{m>0} \exists_{M>0} : \forall_{x,y \in X} : d_1(x,y) \leq M d_2(x,y) \wedge d_2(x,y) \leq m d_1(x,y)$$

Def. ( ) <u>Równoważności metryk</u>. Niech (X,d_1), (X,d_2) będą przestrzeniami metrycznymi.

Metryki d_1, d_2 nazywamy <u>równoważnymi</u> w $X \iff$

$$\forall_{(x_n)\subset X} \ (x_n) \text{ zbieżny w } (X,d_1) \iff (x_n) \text{ zbieżny w } (X,d_2)$$

Tw. ( ) Jeśli d_1, d_2 są jednostajnie równoważne w X to d_1, d_2 są równoważne w X.

Tw. ( ) Metryki: euklidesowa, miejska i maksimum są jednostajnie równoważne w $\mathbb{R}^n$.

Def. ( ) <u>Punktu skupienia</u>. Niech $A \subset X$. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru $A \iff$

$$\exists_{(x_n)\in A\setminus\{x_0\}} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Def. ( ) <u>Ciągu Cauchy'ego</u>. Ciąg (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $(X,d) \iff$

$$\forall_{\varepsilon>0} : \exists_{n_0\in\mathbb{N}} : \forall_{n,m\geq n_0} \ d(a_n,a_m) < \varepsilon$$

Każdy ciąg zbieżny w (X,d) jest ciągiem Cauchy'ego w (X,d).

Def. ( ) Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy <u>zupełną</u> $\iff$

każdy ciąg Cauchy'ego elementów w tej przestrzeni jest zbieżny (do granicy należącej do tej przestrzeni).

Def. ( ) Zbioru zwartego. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $A \subset X$ nazywamy zwartym $\Leftrightarrow$

$$\forall_{(a_n)\in A} : \exists_{(a_{n_k})} \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g \in A$$

ODWZOROWANIA CIĄGŁE

Def. ( ) Niech $f: X \mapsto Y$ będzie pewnym odwzorowaniem. Obrazem zbioru $A \subset X$ przez odwzorowanie f nazywamy zbiór

$$f[A] := \{ f(x) \in Y : x \in A \}$$

Def. ( ) Przeciwobrazem zbioru $B \subset Y$ przy odwzorowaniu f nazywamy zbiór

$$f^{-1}[B] := \{ x \in X : f(x) \in B \}$$

Def. ( ) Granicy funkcji. Niech $f: X \mapsto Y$, $x_0 \in X$, $g \in Y$

1° Def. topologiczna (Cauchy'ego)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{V\in \mathcal{O}(g)} \exists_{U \in \mathcal{O}(x_0)} : f[U \setminus \{x_0\}] \subset V$$

2° Def. Cauchy'ego w przestrzeniach metrycznych

Niech (X,d), (Y,ρ) — przestrzenie metryczne

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in X} \; 0 < d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f,g) < \varepsilon$

- $\forall_{K(g,\varepsilon)} \exists_{K(x_0,\delta)} : f[K(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}] \subset K(g,\varepsilon)$

$\Rightarrow$

3° Def. Heinego w przestrzeniach metrycznych

$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \iff \forall_{(x_n)} (x_n) \in X \setminus \{x_0\}$

Def. ( ) Funkcji ciągłej. $f: X \mapsto Y$. Niech (X, τ_X), (Y, τ_Y) będą przestrzeniami topologicznymi.

1° f jest ciągła w $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def. ( ) $f: X \mapsto Y$; (X, d), (Y, ρ) — przestrzeni metryczne. Odwzorowanie f nazwiemy ograniczonym $\iff$

$f[X]$ jest zbiorem ograniczonym w (Y, ρ)

Tw. ( ) $f: X \mapsto Y$ Jeśli X jest zbiorem zwartym to $f[X]$ jest zbiorem zwartym.

Tw. (Weierstrassa o osiąganiu kresów) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. $f: X \mapsto Y$ i X — zwarty $\Rightarrow$

$\exists_{x_1 \in X} : f(x_1) = \sup f[X]$

$\exists_{x_2 \in X} : f(x_2) = \inf f[X]$

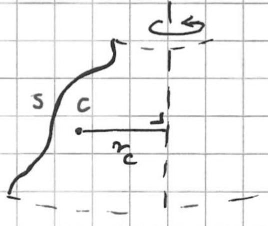
$f, g) < \varepsilon$

X Tw. (o przyjmowaniu wartości pośrednich) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną spójną. $f: X \mapsto Y$

$\forall_{c \in (f(x_1); f(x_2))} \exists_{x_0 \in X} : f(x_0) = c$

Twierdzenie Pappusa – Guldina

I. Pole powierzchni $|S|$ powstałej przez obrót jednorodnej i płaskiej linii ~~do~~ $f(x)$ dookoła osi OX jest równe długości linii s pomnożonej przez $2\pi r_c$, gdzie r_c jest odległością środka ciężkości linii od osi

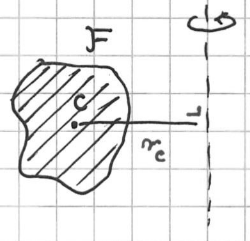


$$|S| = 2\pi r_c s$$

II. Objętość bryły $|V|$ powstałej przy obrocie figury płaskiej dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej figury i nie przecinającej jej wnętrza

$$|V| = 2\pi r_c A$$

gdzie $A = [F]$, a r_c jest odległością środka ciężkości F od osi obrotu.



PRZESTRZENIE UNORMOWANE I UNITARNE

<u>Def. ( )</u> <u>Iloczynu skalarnego</u>. Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowanie $\circ : V^2 \mapsto \mathbb{K}$ nazywamy <u>iloczynem skalarnym</u> $\Leftrightarrow$

1° $\forall_{\vec{v} \in V} : \vec{v} \circ \vec{v} \geq 0$

2° $\forall_{\vec{v}, \vec{u} \in V} : \vec{v} \circ \vec{u} = \vec{u} \circ \vec{v}$ (przemienność)

3° $\forall_{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V} : (\vec{v} + \vec{u}) \circ \vec{w} = \vec{v} \circ \vec{w} + \vec{u} \circ \vec{w}$

4° $\forall_{\vec{v}, \vec{u} \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{K}} : (\alpha \vec{v}) \circ \vec{u} = \alpha (\vec{v} \circ \vec{u})$

5° $\forall_{\vec{v} \in V} : \vec{v} \circ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Parę $(V, \circ)$ nazywamy <u>przestrzenią unitarną</u>.

<u>Def. ( )</u> <u>Normy</u>. Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowanie $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{K}$ nazywamy <u>normą</u> w V $\Leftrightarrow$

1° $\forall_{\vec{v} \in V} : \|\vec{v}\| \geq 0$

2° $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \forall_{\vec{v} \in V} : \|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$ (jednorodność)

3° $\forall_{\vec{v}, \vec{u} \in V} : \|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$

4° $\forall_{\vec{v} \in V} : \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy <u>przestrzenią unormowaną</u>.

Tw. ( ) Każda przestrzeń unormowana jest metryczna. Metryka $d(\vec{v},\vec{u})$ indukowana przez normę $\|\cdot\|$

$$d(\vec{v},\vec{u}) = \|\vec{v}-\vec{u}\|$$

Def. ( ) Przestrzeń unormowaną i zupełną nazywamy przestrzenią Banacha.

Tw. ( ) Każda przestrzeń unitarna jest unormowana z normą $\|\cdot\|$:

$$\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}\| = \vec{v}\circ\vec{v}$$

Def. ( ) Przestrzeń unitarną zupełną nazywamy przestrzenią Hilberta.

Szeregi formalne

Def. (szeregu) Niech (a_n) będzie ciągiem $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
n-tą sumą częściową ciągu nazywamy

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Szeregiem nazywamy parę ciągów $((a_n), (S_n))$ i oznaczamy przez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Def. (szeregu zbieżnego) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym

$\iff$ istnieje $S \in \mathbb{R}$ takie, że $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

Tw. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (!)

Szeregi testujące

- szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ jest zbieżny. $\iff$
  $\iff$ $|q| < 1$ i wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$.
- Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny $\iff$
  $\alpha > 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Def. ( ) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym

$\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy warunkowo zbieżnym.

$\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – zbieżny $\wedge$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – rozbieżny

Tw. ( ) Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

I. Kryterium d'Alemberta

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem i $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n \neq 0$ oraz

$g := \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, wówczas

1° jeśli $g > 1$ szereg jest rozbieżny

2° jeśli $g < 1$ szereg jest zbieżny

II. Kryterium Cauchy'ego

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $g := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, wówczas

1° jeśli $g > 1$ szereg jest rozbieżny

2° jeśli $g < 1$ szereg jest zbieżny

(Asymptotyczne kryterium porównawcze)

III. Kryterium porównawcze graniczne ilorazowe

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $\forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n_0 \in \mathbb{N}}}: a_n \geq 0 \wedge b_n \geq 0$ oraz

$g := \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; \infty)$, wówczas

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny

IV. Kryteria porównawcze

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz zachodzi $\forall_{n \geq n_0}: a_n \geq 0 \wedge b_n \geq 0$ oraz

$\forall_{n \geq n_0'} \; a_n \leq b_n$ wówczas:

1° jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny

2° jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rozbieżny

V. Kryterium całkowe

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}}: a_n \geq 0$. Niech $f: [n_0; +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $\forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}} f(n) = a_n$ oraz f jest nierosnąca w $[n_0; \infty)$, wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny} \iff \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \text{ jest zbieżna}$$

VI. Kryterium Leibniza

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ gdzie $\forall_{n \in \mathbb{N}}: a_n > 0$ oraz $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ oraz (a_n) jest malejący (tzw. szereg naprzemienny), wówczas

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny oraz $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; |s_n - s| < a_{n+1}$

~~Tw. (*) Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny a ciąg (k_n) ściśle rosnący~~

~~$b_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n}$~~

~~to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.~~

CIĄGI FUNKCYJNE

Def. ( ) ciągiem funkcyjnym nazywamy $(f_n(x))$:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}: f_n(x): X \mapsto \mathbb{R} \;\wedge\; X \subset \mathbb{R}.$$

Def. ( ) ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo w $X \Leftrightarrow$

$$\exists_{f: X\mapsto\mathbb{R}}: \forall_{x\in X} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

f — funkcja graniczna

$f_n \overset{X}{\mapsto} f \;\equiv\;$ ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo w X do funkcji granicznej $f(x)$

Def. ( ) ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie w $X \Leftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon>0}: \exists_{n_0\in\mathbb{N}}: \forall_{n>n_0}: \forall_{x\in X} \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \;\equiv\;$ ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie w X do $f(x)$

Zauważmy, że def. te nie są równoważne bo przy zbieżności punktowej n_0 może być różne dla każdego $x \in X$, a przy zbieżności jednostajnej n_0 jest takie samo dla wszystkich $x \in X$ przy ustalonym ε.

Tw. ( ) Jeśli $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ to $f_n \overset{X}{\mapsto} f$.

Tw. ( ) Jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ — ciągła ~~to~~ i $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ to

f — ciągła.

Def. ( ) Niech $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$ i niech f, g — ograniczone. Zdefiniujmy funkcję d_c

$$d_c(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Okazuje się, że d_c jest metryką (Czebyszewa) w zbiorze funkcji ograniczonych.

Tw. (!) Niech $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ $f_n(x)$ — ograniczona, wówczas

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \iff \lim_{n \to \infty} d_c(f_n(x), f(x)) = 0$$

Tw. ( ) (o różniczkowalności funkcji granicznej)

Niech $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ $\wedge$ f_n — różniczkowalna w X $\wedge$

$\wedge$ $(f_n') \overset{X}{\rightrightarrows} \exists F$ wówczas

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right)' = f'(x)$$

Tw. ( ) (o całkowaniu funkcji granicznej)

Niech $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ $\wedge$ f_n — całkowalna w X, wówczas

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n \to \infty} \left[\int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\, dx\right]$$

Kryterium Kummera

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\forall_{n \in \mathbb{N}} : a_n > 0$, wówczas szereg ten jest zbieżny $\iff$

istnieje liczba $\delta > 0$ i ciąg (b_n), $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ b_n > 0$, takie że nierówność

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta \quad \text{jest spełniona } \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

SZEREGI FUNKCYJNE

Def.() Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcyjnym i zdefiniujmy ciąg $(S_n(x))$

$$S_n(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

Szeregiem funkcyjnym nazywamy parę $((f_n), (S_n))$

- szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest punktowo zbieżny w $X \subset \mathbb{R}$ $\iff \exists_{S: X \mapsto \mathbb{R}} : S_n \overset{X}{\mapsto} S$.
- szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w $X \subset \mathbb{R}$ $\iff \exists_{S: X \mapsto \mathbb{R}} : S_n \overset{X}{\rightrightarrows} S$

Tw.() Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest punktowo zbieżny w X to

$\forall_{x \in X} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (f_n \overset{X}{\mapsto} 0)$

Tw.() jeśli $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) \Rightarrow (f_n) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \equiv f$

Tw. (Weierstrassa) Niech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i istnieje ciąg (a_n)

taki, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} : \forall_{x \in X} : |f_n(x)| \le a_n$, wówczas

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — zbieżny $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — jednostajnie zbieżny w X

Tw. (różniczkowalność, całkowalność, ciągłość)

1° Niech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i $f_n(x)$ różniczkowalne w X,

jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{X}{\mapsto} S(x) \wedge \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \overset{X}{\rightrightarrows} T(x)$ to

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

2° Niech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i $f_n(x)$ całkowalna w X,

jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ to $\forall_{x_1, x_2 \in X}: \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx$

3° Niech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i $f(x)$ ciągła w X,

jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ to $S(x)$ — ciągła w X.

I szeregi potęgowe

Def.() Szeregiem potęgowym o środku w punkcie x_0 nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad x, x_0, a_n \in \mathbb{R}$$

Tw.() Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym

1° Jeśli szereg jest zbieżny dla pewnego $x_1 \in \mathbb{R}$ to jest zbieżny $\forall_{x_2 \in \mathbb{R}}: |x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$

2° Jeśli szereg jest rozbieżny dla pewnego $x_1 \in \mathbb{R}$ to jest rozbieżny $\forall_{x_2 \in \mathbb{R}}: |x_2 - x_0| > |x_1 - x_0|$

Def.() Zdefiniujmy R

$$R := \sup \left\{ |x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ jest zbieżny} \right\}$$

1° $R = 0 \Rightarrow$ szereg zbieżny tylko w $x = x_0$

2° $R = +\infty \Rightarrow$ szereg zbieżny $\forall_{x \in \mathbb{R}}$

3° Przedział $(x_0 - R, x_0 + R)$ nazywamy **przedziałem zbieżności**

Tw. (Cauchy'ego – Hadamarda)

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Zdefiniujmy wielkość λ

$$\lambda := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$$

wariant $\lambda := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$

wówczas

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{dla } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} & \text{dla } 0<\lambda<+\infty \\ 0 & \text{dla } \lambda = +\infty \end{cases}$$

Tw. ( ) Zbieżność szeregu potęgowego

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie zbieżny w $(x_0-R; x_0+R)$

1° $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny w $(x_0-R; x_0+R)$

2° $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest niemal jednostajnie zbieżny w (x_0-R, x_0+R)

tzn. jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale domkniętym $[a;b] \subset (x_0-R; x_0+R)$.

Własności sumy szeregu potęgowego

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie zbieżny w $(x_0-R; x_0+R)$

1° suma szeregu $S(x)$ jest ciągła w $(x_0-R; x_0+R)$

2° suma szeregu $S(x)$ jest różniczkowalna w $(x_0-R; x_0+R)$ i zachodzi

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(x-x_0)^n\right]'$$

3° suma szeregu $S(x)$ jest całkowalna w $(x_0-R; x_0+R)$ i zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} (x-x_0)^n\,dx$$

Tw. (Abela)

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie zbieżny w $(x_0-R; x_0+R)$ i w $x_1 = x_0 - R$ oraz niech istnieje granica

$$\lim_{x\to x_1^+} S(x)$$

wówczas $S(x_1) = \lim_{x\to x_1^+} S(x)$

II SZEREG TAYLORA

Tw. ( ) „O rozwijaniu w szereg Taylora"

Niech U będzie otoczeniem punktu x_0 i załóżmy, że $f \in C^{\infty}(U)$, $\forall_{x\in U} \lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$ gdzie R_n jest resztą Lagrange'a we wzorze Taylora, wówczas

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ — szereg Taylora funkcji f w punkcie x_0

Def. (Uogólnionego symbolu Newtona)

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 , & k=0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} , & k \geq 1 \end{cases}$$

Tw. (Uogólniony wzór Newtona)

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k , \quad x \in (-1;1) \qquad (!!!)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} , \quad x \in \mathbb{R}$$

SZEREG FOURIERA (trygonometryczne)

Def. Szeregiem trygonometrycznym (Fouriera) funkcji $f(t)$, $x \in [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ nazywamy szereg postaci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

gdzie

- $a_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$
- $b_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$
- $T := \frac{2\pi}{\omega}$

Warunki Dirichleta

1) $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ i f – ograniczona

2) f jest przedziałami monotoniczna w $[a;b]$

3) f jest ciągła w $[a;b]$ poza skończoną liczbą punktów nieciągłości, w których musi zachodzić

$$2f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

4) $f(a) = f(b) = \dfrac{\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to b^-} f(x)}{2}$

Tw. (Dirichleta) Jeśli f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$, to szereg Fouriera tej funkcji jest zbieżny punktowo do tej funkcji w $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

$$\forall_{x\in[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right]$$

1° Jeśli $\forall_{x\in[-T/2;T/2]}\ f(x) = -f(-x)$ i f – rozwijalna w szereg Fouriera w $[-T/2;T/2]$ to

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

2° Jeśli $\forall_{x\in[-T/2;T/2]}\ f(x) = f(-x)$ i f – rozwijalna w szereg Fouriera w $[-T/2;T/2]$ to

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x)$$

Elementy teorii formalnych szeregów Fouriera

Def. $L^2[a;b] := \left\{ f:[a;b]\mapsto\mathbb{R} : \int_a^b f^2(x)\,dx < \infty \right\}$

nazywamy zbiorem funkcji całkowalnych z kwadratem.

Tw.( ) Odwzorowanie $\circ : L^2[a;b]\times L^2[a;b] \mapsto L^2[a;b]$ takie, że

$$f\circ g := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

jest iloczynem skalarnym w $L^2[a;b]$

Def.( ) Niech $(f_n)\subset L^2[a;b] \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}\ f_n(x)\not\equiv 0$ wtedy

- ciąg (f_n) nazywamy ortogonalnym $\iff \forall_{i,j\in\mathbb{N}}\ i\neq j \Rightarrow f_i\circ f_j \equiv 0$
- ciąg (f_n) nazywamy ortonormalnym $\iff \forall_{i,j\in\mathbb{N}}\ f_i\circ f_j = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Def. (szeregu Fouriera) Niech $f \in L^2[a;b]$ i niech dany będzie ciąg ortogonalny (P_n) wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad \text{gdzie} \quad c_n := \frac{f \circ P_n}{P_n \circ P_n}$$

nazywamy szeregiem Fouriera względem ciągu (P_n) funkcji $f(x)$

Tw. (nierówność Bessela)

Niech $f \in L^2[a;b]$ i niech dany będzie ciąg ortogonalny (P_n) wówczas

$$f \circ f \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 (P_n \circ P_n) \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{f \circ P_n}{P_n \circ P_n}$$

~~Tw. (tożsamość Parsevala)~~

~~Niech $f \in L^2[a;b]$~~

Tw. Parsevala

Niech $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \right] + \frac{a_0}{2}$$

wówczas

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(x)\, dx = \frac{1}{4} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2} \right)$$

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Tw. ( ) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ \vec{x}_n := (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$ wówczas

$$\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = (g_1, g_2, \dots, g_k) \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, k\}} : \lim_{n \to \infty} x_n^i = g_i$$

Def. ( ) Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ i $S(x_0, r) \subset X$. Mówimy, że granicą funkcji $f(x_1, \dots, x_n)$ w punkcie $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ jest $g \Leftrightarrow$

$\forall$ ciągu (x_n) spełniającego warunki

1° $\forall_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in X$

2° $\forall_{n \in \mathbb{N}} : x_n \neq x_0$

3° $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

zachodzi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$

Def. ( ) Granice iterowane: $\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right)$, $\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$

Def. ( ) Niech $\vec{f} : X \mapsto \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ oraz

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \right)$$

$$\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in X$$

- $\vec{f}$ jest ciągła w $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, m\}}$ f_i jest ciągła w $\vec{x}_0$
- f_i jest ciągła w $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}_0)$

Tw. ( ) Niech $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ i f, g — ciągłe w $x_0 \in X$

wówczas $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ — ciągłe w $x_0 \in X$

Def.() Pochodna wzdłuż wektora

Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{f}(x_1,\dots,x_n) = \left(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots, f_m(x_1,\dots,x_n)\right)$

Niech $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ – wektor. Pochodną funkcji f w punkcie $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ wzdłuż wektora h nazywamy

$$\partial_h f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+t\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t}$$

Def.() Pochodna w kierunku wektora $\vec{h}$ to pochodna wzdłuż wersora $\frac{1}{\|\vec{h}\|}\vec{h}$.

Def.() Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ oraz $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Pochodną cząstkową funkcji $\vec{f}$ w punkcie $\vec{x}_0$ względem zmiennej x_i nazywamy

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\vec{f}(x_1,\dots,x_i+\Delta x_i,\dots,x_n) - \vec{f}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{\Delta x_i}$$

Def.() Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że $\vec{f}$ jest różniczkowalna w punkcie $\vec{x}_0$ $\Leftrightarrow$

istnieje takie odwzorowanie liniowe $L_{x_0}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

$$\forall_{\vec{h}\in\mathbb{R}^n} \quad \vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = L_{x_0}(\vec{h}) + r_{x_0}(\vec{h})$$

gdzie $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r_{x_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, $r_{x_0}(h)$ – reszta

$L_{x_0} = d\vec{f}(\vec{x}_0)$ – różniczka funkcji $\vec{f}$ w punkcie $\vec{x}_0$

Tw.() Postać macierzowa różniczki funkcji

Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\vec{f}$ – różniczkowalna w x_0

$\vec{f}(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})\right)$

$$d\vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := |J|$$

oznaczenie jakobianu

Macierz $\vec{f}'(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\right]_{m \times n}$ nazywamy <u>macierzą Jacobiego</u> funkcji $\vec{f}$ w punkcie $\vec{x}_0$.

Jeśli $n=m$ to $\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\right]_{n \times n}$ nazywamy <u>jakobianem</u> funkcji $\vec{f}$ w punkcie $\vec{x}_0$.

<u>Tw. ( ) (o związku różniczki z pochodnymi wzdłuż wektora)</u>

Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz załóżmy, że $\vec{f}$ jest różniczkowalna w $\vec{x}_0$, wówczas

istnieje pochodna funkcji $\vec{f}$ w punkcie $\vec{x}_0$ wzdłuż dowolnego wektora $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ i zachodzi

$$\partial_h \vec{f}(\vec{x}_0) = d\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h})$$

<u>Tw. ( )</u> Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\vec{f}$ różniczkowalna w punkcie $\vec{x}_0$, wówczas

$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}$ istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$

<u>Tw. ( )</u> Jeśli $\vec{f}$ jest różniczkowalna w $\vec{x}_0$ to $\vec{f}$ jest ciągła w $\vec{x}_0$.

<u>Tw. ( )</u> <u>Warunek wystarczający różniczkowalności</u>

Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}$ <u>istnieją i są ciągłe</u> pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie $\vec{x}_0$ to $\vec{f}$ jest różniczkowalna w $\vec{x}_0$.

Tw.( ) Dla funkcji $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y)$ zachodzi

$$f(x,y) \overset{(0,0)}{\approx} f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 + \ldots$$

Def.( ) Niech $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$. Niech $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$ będzie określona w pewnym otoczeniu $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu $\vec{x_0}$. Pochodną cząstkową 2-go rzędu nazywamy

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x_0}) := \lim_{\Delta x_j \mapsto 0} \frac{\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(x_0^1, \ldots, x_0^j + \Delta x_j, \ldots, x_0^n) - \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(\vec{x_0})}{\Delta x_j}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}\right)$$

Tw.( ) Schwarza o równości pochodnych mieszanych

Niech $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w x_0, wówczas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \iff \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Tw.( ) Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = f(x,y)$ ~~to~~ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$$z(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot [x-x_0, y-y_0]$$

EKSTREMA LOKALNE F. WIELU ZMIENNYCH

<u>Def. ()</u> Niech $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma maksimum (minimum) lokalne w $\vec{x}_0$ $\Leftrightarrow$

istnieje takie otoczenie U punktu $\vec{x}_0$, że
$$\forall_{\substack{\vec{x} \in U \\ \vec{x} \neq \vec{x}_0}} : f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0) \quad (>)$$

<u>Tw. ()</u> Niech $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ oraz załóżmy, że f jest różniczkowalna w $\vec{x}_0$ oraz ma ekstremum lokalne w $\vec{x}_0$, wówczas
$$\forall_{i \in \{1, \dots, n\}} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0$$

<u>Def. ()</u> <u>Formą kwadratową</u> nazywamy funkcję
$\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ taką, że
$$\varphi(\vec{x}) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gdzie A jest <u>macierzą symetryczną</u> i nazywamy ją <u>macierzą formy kwadratowej</u>.

Mówimy, że forma kwadratowa φ jest:

1° <u>dodatnio określona</u> $\Leftrightarrow \forall_{\substack{\vec{h} \in \mathbb{R}^n \\ \vec{h} \neq \vec{0}}} : \varphi(\vec{h}) > 0$

2° <u>ujemnie określona</u> $\Leftrightarrow \forall_{\vec{h} \in \mathbb{R}^n, \vec{h} \neq \vec{0}} : \varphi(\vec{h}) < 0$

3° <u>nieujemnie / niedodatnio</u> (analogicznie)

4° <u>nieokreślona</u> (w.p.p.)

Tw. () Sylvestera – Jacobiego

Niech $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ będzie macierzą formy kwadratowej φ i zdefiniujmy ciąg (d_k)

$$d_k := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

wówczas

1) Jeśli $\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \; d_k > 0 \implies \varphi$ jest dodatnio określona $(+, +, +, \dots)$

2) Jeśli $\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \; (-1)^k d_k > 0 \implies \varphi$ jest ujemnie określona $(-, +, -, +, \dots)$

3) Analogiczne twierdzenia dla φ określonej nieujemnie / niedodatnio.

4) Jeśli nie zachodzi 3) to φ jest nieokreślona.

Def. () Macierz Hessego

Niech $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ i f jest dwukrotnie różniczkowalna w $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Macierz formy kwadratowej związanej z drugą pochodną f w punkcie $\vec{x}_0$ nazywamy

$$M(\vec{x}_0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

Tw. () Warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych

Niech $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ oraz załóżmy $\forall_{i\in\{1,\dots,n\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial f}{\partial x_i}$ – ciągłe oraz załóżmy, że $\forall_{i\in\{1,\dots,n\}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0}) = 0$, oraz ~~kładziemy~~

oznaczmy $d_k := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, gdzie $a_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x_0})$ tj.

macierz $[a_{ij}]_{n\times n}$ jest <u>macierzą Hessego</u>. Wówczas:

1° $\forall_{k\in\{1,\dots,n\}} \; d_k > 0 \implies$ <u>f ma minimum lokalne</u> w $\vec{x_0}$

2° $\forall_{k\in\{1,\dots,n\}} \; (-1)^k d_k > 0 \implies$ <u>f ma maksimum lokalne</u> w $\vec{x_0}$

3° Jeśli forma kwadratowa $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot [a_{ij}]_{n\times n} \cdot \vec{x}^T$ nie jest określona w $\vec{x_0}$ to <u>f nie ma ekstremum lokalnego</u> w punkcie $\vec{x_0}$.

<u>Uwaga!</u> Jeśli zachodzą słabe nierówności to wówczas nie możemy nic wnioskować z powyższego twierdzenia.

Tw. () Warunek wystarczający na 2-krotną różniczkowalność

Jeśli <u>istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe 2-go rzędu</u> funkcji f w punkcie $\vec{x_0}$ to f jest dwukrotnie różniczkowalna w $\vec{x_0}$.

FUNKCJE UWIKŁANE

<u>Def. ( )</u> Niech $F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \mid F(x,y) \equiv 0$ oraz niech $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}_F$. Jeżeli w otoczeniu punktu (x_0, y_0) istnieje funkcja $f(x): V \mapsto W \mid \forall_{x \in V} F(x, f(x)) = 0$ to mówimy, że funkcję F możemy rozwikłać w otoczeniu punktu (x_0, y_0). Funkcję $f(x)$ nazywamy <u>funkcją uwikłaną</u> daną równaniem $F(x,y) = 0$.

<u>Ekstrema lokalne funkcji uwikłanych</u>

Powiedzmy, że chcemy znaleźć ekstrema lokalne funkcji $z(x,y)$ zadanej równaniem $f(x,y,z) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial_x f}{\partial_z f} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial_y f}{\partial_z f} \end{cases}$$

skąd punkty podejrzane o ekstremum są dane

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) \equiv 0$

$\dfrac{dy}{dx}$

EKSTREMA WARUNKOWE

<u>Def.()</u> Niech $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ i zdefiniujmy funkcję więzów (warunek) $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$, $D_g \subset \mathbb{R}^n$. Niech $S := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{g(\vec{x}) = 0}_{\text{tzw. więzów}} \}$

<u>Ekstremum warunkowym</u> funkcji f przy więzach g nazywamy ekstremum lokalne funkcji $\bar{f} : S \mapsto \mathbb{R}$.

<u>Def()</u> <u>Metoda Lagrange'a</u>

Tworzymy funkcję Lagrange'a $L(\vec{x}, \lambda) := f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$

<u>Tw.()</u> (Warunek konieczny istnienia eks. war.)

Jeśli $f(\vec{x})$ ma ekstremum warunkowe w punkcie $\vec{x}_0 \in S$ to

1° $\exists_{\lambda_0 \in \mathbb{R}} : \forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \ \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}_0, \lambda) = 0$

2° $g(\vec{x}_0) = 0$

<u>Def.()</u> Hesjan obrzeżony

$$H_n := \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & & & \\ \vdots & & M_L(\vec{x}_0, \lambda_0) & \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) & & & \end{bmatrix}, \quad h_n := \det H_n$$

<u>Tw.()</u> (Warunek wystarczający na istnienie eks. war.)

1° $\forall_{k \in \{2,\dots,n\}} : h_k < 0 \Rightarrow$ f ma minimum lokalne warunkowe w $\vec{x}_0$

2° $\forall_{k \in \{2,\dots,n\}} :$ $\cancel{h_k > 0}$ $(-1)^{k+1} h_k < 0 \Rightarrow$ f ma maksimum lokalne warunkowe w $\vec{x}_0$

RACHUNEK CAŁKOWY F. WIELU ZMIENNYCH

Def. ( ) Całka podwójna po prostokącie.

Niech prostokąt $P \subset \mathbb{R}^2$ i $f: P \mapsto \mathbb{R}$. Tworzymy ciąg (Π_n) podziałów ~~po~~ P na n małych prostokątów $p_1, \dots, p_n$.
Niech $\delta_n \equiv$ długości najdłuższej przekątnej dla podziału Π_n.
Mówimy, że ciąg podziałów jest normalny $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$

Tworzymy sumę całkową $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\underbrace{c_i, d_i}_{\text{punkt pośredni wewn. } p_i}) \cdot \underbrace{|p_i|}_{\text{pole } p_i}$

(!) Jeśli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów prostokąta P istnieje jedna i ta sama granica właściwa ciągu sum całkowych $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ to

$$\iint\limits_P f(x,y)\, dx\, dy = S.$$

Tw. ( ) Warunek wystarczający na całkowalność po prostokącie.

Jeżeli $f(x,y)$ jest ciągła na prostokącie P, to f jest całkowalna po prostokącie P.

Tw. ( ) (Fubiniego)

Niech $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ i $f: P \mapsto \mathbb{R}$ będzie całkowalna po P, wówczas

1° Funkcja $\varphi(x) := \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy$ jest całkowalna ~~w~~ przedziale $[a_1, b_1]$

2° $$\iint\limits_P f(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left[\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy \right] dx$$

Def.() <u>Całka podwójna po obszarze ograniczonym</u>

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym, a $D \subset P$ pewnym prostokątem zawierającym D. Zdefiniujmy funkcję $\chi_D(x,y)$ (tzw. f. charakterystyczna D)

$$\chi_D(x,y) := \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Całkę podwójną po D nazywamy

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_P \left(f(x,y)\,\chi_D(x,y)\right)dx\,dy$$

Def.() <u>Obszarem normalnym</u> względem x nazywamy

obszar $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a;b] \wedge \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, gdzie

φ, ψ – funkcje ciągłe w $[a;b]$

Analogicznie definiujemy <u>obszar normalny względem y</u>.

Tw.() (O zamianie całki podwójnej po D na iterowaną)

Niech D będzie obszarem normalnym względem x takim, że $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$ i φ, ψ – ciągłe. Wówczas

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx =$$

Tw.() Niech f, g – całkowalne, wówczas

$$\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}: \iint_D (\alpha f + \beta g)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f\,dx\,dy + \beta \iint_D g\,dx\,dy$$

Tw.() Niech D_1, D_2 – obszary normalne i $\operatorname{int} D_1 \cap \operatorname{int} D_2 = \emptyset$,

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy$$

- $f \nearrow \overset{def}{\iff} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f}: \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- $f \searrow \overset{def}{\iff} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f}: \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
- f jest injekcją (f. różnowartościowa) $\overset{def}{\iff}$
  $\overset{def}{\iff} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f} \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- f jest surjekcją $\overset{def}{\iff} \forall_{y \in Y} : \exists_{x \in X} : f(x) = y$
- f jest bijekcją $\overset{def}{\iff}$ f jest injekcją $\wedge$ f jest surjekcją
- f jest parzysta $\overset{def}{\iff} \forall_{x \in \mathbb{D}_f}: f(x) = f(-x) \wedge -x \in \mathbb{D}_f$
- f jest nieparzysta $\overset{def}{\iff} \forall_{x \in \mathbb{D}_f}: f(x) = -f(-x) \wedge -x \in \mathbb{D}_f$
- f jest okresowa $\overset{def}{\iff} \exists_{T \neq 0} : \forall_{x \in \mathbb{D}_f} : f(x) = f(x+T) \wedge x+T \in \mathbb{D}_f$
- $f \circ g = f(g(x))$ złożenie g z f
- $f(x) \cong g(x) \iff \mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g \wedge \forall_{x \in \mathbb{D}_f}: f(x) = g(x)$

Podstawienie uniwersalne $\quad t = \tan \frac{\alpha}{2}$

- $\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$ $\quad$ • $\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad$ • $\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

<u>Tw.()</u> (O interpretacji geometrycznej całki podwójnej)

Niech D – obszar regularny, $f: D \mapsto \mathbb{R}_+$, wówczas objętość bryły $V := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \wedge 0 \le z \le f(x,y)\}$ wynosi

$$|V| = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy .$$

<u>Tw.()</u> Objętość obszaru regularnego $V := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \wedge \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ wynosi

$$|V| = \iint_D \left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right) dx\,dy$$

- $f \nearrow \overset{def}{\iff} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f}: \ x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$
- $f \searrow \overset{def}{\iff} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f}: \ x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$
- f jest injekcją (f. różnowartościową) $\overset{def}{\iff}$

  $\overset{def}{\iff} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f} \ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- f jest surjekcją $\overset{def}{\iff} \forall_{y \in Y}: \exists_{x \in X}: f(x) = y$
- f jest bijekcją $\overset{def}{\iff}$ f jest injekcją $\wedge$ f jest surjekcją
- f jest parzysta $\overset{def}{\iff} \forall_{x \in \mathbb{D}_f}: f(x) = f(-x) \ \wedge \ -x \in \mathbb{D}_f$
- f jest nieparzysta $\overset{def}{\iff} \forall_{x \in \mathbb{D}_f}: f(x) = -f(-x) \ \wedge \ -x \in \mathbb{D}_f$
- f jest okresowa $\overset{def}{\iff} \exists_{T \neq 0}: \forall_{x \in \mathbb{D}_f}: f(x) = f(x+T) \ \wedge \ x+T \in \mathbb{D}_f$
- $f \circ g = f(g(x))$ złożenie g z f
- $f(x) \cong g(x) \iff \mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g \ \wedge \ \forall_{x \in \mathbb{D}_f}: f(x) = g(x)$

Podstawienie uniwersalne $t = \tan\frac{\alpha}{2}$

- $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$ • $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ • $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Tw.() (O interpretacji geometrycznej całki podwójnej)

Niech D – obszar regularny, $f: D \mapsto \mathbb{R}_+$, wówczas objętość bryły $V := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \ \wedge \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ wynosi

$$|V| = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Tw.() Objętość obszaru regularnego $V := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \ \wedge \ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$ wynosi

$$|V| = \iint_D \left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right) dx\,dy$$

Def. () Obszar regularny $D \overset{def}{\iff}$

1° $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n \;|\; \forall_{i \in \{1,\ldots,n\}}: D_i$ – obszar normalny

2° $\forall_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i \neq j}}: \; \text{int}\, D_i \cap \text{int}\, D_j = \emptyset$.

Zastosowania całki podwójnej

- masa obszaru $\quad M = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy$
- momenty statyczne (figury płaskiej) $\quad M_{OX} = \iint\limits_D \rho(x,y)\, y \,dx\,dy$

$$M_{OY} = \iint\limits_D \rho(x,y)\, x \,dx\,dy$$

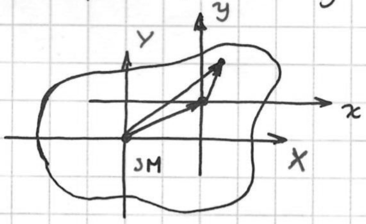
- środek masy $\quad \vec{R} = \left(\frac{M_{OY}}{M}, \frac{M_{OX}}{M}\right)$ (figury płaskiej)
- moment bezwładności $\quad I = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dx\,dy$

(figury płaskiej względem osi prostopadłej do niej i przechodzącej przez punkt $(0,0)$)

Tw. Steinera Niech I_{CM} oznacza moment bezwładności figury płaskiej względem osi prostopadłej do niej i przechodzącej przez SM. Wówczas

$I = I_{CM} + Md^2$, gdzie d jest odległością między osiami.

Dowód



$$I = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\rho\,dx\,dy$$

$$I_{SM} = \iint\limits_D (X^2+Y^2)\,\rho\,dX\,dY$$

$$(x,y) = (X,Y) - (d_x, d_y) = (X-d_x, Y-d_y)$$

Jednocześnie $\iint_D \rho Y \, dX dY = \iint_D \rho X \, dX dY = 0$

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\rho \, dx\, dy = \iint_D \left((X+d_x)^2 + (Y+d_y)^2 \right) \rho \, dX dY =$$

$$= \iint_D (X^2+Y^2)\rho \, dX dY + \iint_D \underbrace{(d_x^2+d_y^2)}_{d^2} \rho \, dX dY +$$

$$+ \underbrace{2\iint_D d_x \rho X \, dX dY}_{0} + \underbrace{2\iint_D d_y \rho Y \, dX dY}_{0} =$$

$$= I_{SM} + d^2 \iint_D \rho \, dX dY = I_{SM} + Md^2 \quad \blacksquare$$

[illegible]

RACHUNEK CAŁKOWY F. WIELU ZMIENNYCH C.D.

Def. () Całka potrójna po prostopadłościanie

- Tworzymy ciąg (Π_n) podziałów prostopadłościanu $P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3]$ na n małych prostopadłościanów $p_1, \dots, p_n$.

- Ciąg podziałów nazywamy normalnym $\iff \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ gdzie δ_n jest najdłuższą przekątną w Π_n.

- Tworzymy sumy całkowe $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i, y_i, z_i)}_{\text{punkt pośredni wewn. } p_i} \underbrace{|p_i|}_{\text{objętość } p_i}$

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{n\to\infty} S_n$$

o ile ta granica nie zależy od wyboru ciągu podziałów normalnych, ani wyboru punktów pośrednich.

Def. () całka po obszarze ograniczonym $D \subset P \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_P f \cdot \chi_D(x,y,z)\, d^3r$$

Def. () Obszarem normalnym wzgl. OXY nazywamy zbiór $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \wedge \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\}$ gdzie D jest obszarem regularnym.

Tw. () (całka iterowana dla obszaru normalnego wzgl. OXY)

Niech V będzie obszarem normalnym wzgl. OXY.

$$\iiint\limits_V f\, d^3r = \iint\limits_D \left(dx\, dy \int\limits_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f\, dz \right)$$

rzut obszaru V na płaszczyznę OXY

Zastosowania całki potrójnej

- Objętość bryły V: $|V| = \iiint\limits_V d^3 r$
- Masa bryły: $M = \iiint\limits_V \rho(\vec{r})\, d^3 r$
- Środek masy: $\vec{R} = \frac{1}{M} \iiint\limits_V \rho(\vec{r})\, \vec{r}\, d^3 r$
- Moment bezwładności bryły wzgl. osi OZ

$$I_{zz} = \iiint\limits_V \rho(\vec{r})\,(x^2+y^2)\, d^3 r$$

Def.() Całka niewłaściwa wielokrotna

Pr.: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = ?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\parallel$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r\, dr\, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\phi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} \left(e^{-r^2} \right)' dr =$$

$$= -\pi \left[e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Def. () całka krzywoliniowa nieskierowana

Niech $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$ będzie łukiem gładkim

tj. $\forall_{t \in [\alpha;\beta]} \; x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$ wówczas

$\int\limits_L f(x,y)\, dl$ jest całką krzywoliniową nieskierowaną funkcji f po łuku L

$$\int\limits_L f(x,y)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$\cong \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Def. () Krzywa regularna to suma skończonej liczby łuków gładkich.

Zastosowania całki krzywoliniowej nieskierowanej

- długość łuku $|L| = \int\limits_L dl$
- masa łuku $M = \int\limits_L \rho(x,y)\, dl$
- środek masy $\vec{R} = \int\limits_L \rho\, [x,y]\, dl$
- moment bezwładności $I = \int\limits_L \rho(x,y)\,(x^2 + y^2)\, dl$

Def. () całka krzywoliniowa skierowana

Niech $\vec{F} = [P(x,y), Q(x,y)]$ będzie polem wektorowym.

$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L (P\,dx + Q\,dy)$ jest całką ~~skierowaną~~

krzywoliniową skierowaną funkcji $\vec{F}$ po łuku L.

Dla łuku gładkiego $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\right) dt$

Def. () Obszar D nazywamy jednospójnym $\Leftrightarrow$ gdy wnętrze każdej krzywej zamkniętej (bez punktów wielokrotnych) zawartej w D zawiera się w D.

∂D – brzeg obszaru D

Tw. () Jeśli D jest jednospójny i ograniczony to ∂D jest krzywą Jordana (tj. krzywa zamknięta bez punktów wielokrotnych).

Tw. () Greena. Niech D będzie obszarem jednospójnym i ograniczonym. Niech $\vec{F}(x,y) = [P(x,y), Q(x,y)]$ i $P, Q \in C^1(D \cup \partial D)$, wówczas

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE (DIFFERENTIAL EQS)

Przestrzenie metryczne

Def. (1) Niech $X \neq \emptyset$. Metryką w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $d: X \times X \mapsto \mathbb{R}$ taką, że

1° $\forall_{x,y \in X}: \ d(x,y) \geq 0$

2° $\forall_{x,y \in X}: \ d(x,y) = d(y,x)$ symetria

3° $\forall_{x,y,z \in X}: \ d(x,y) + d(y,z) \geq d(z,x)$ nierówność $\triangle$

4° $\forall_{x,y \in X}: \ d(x,y) = 0 \iff x = y$

Parę (X,d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Def. (2) Niech (X,d) – przestrzeń metryczna. Kulą o środku $x_0 \in X$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ nazywamy zbiór

$$K(x_0, r) := \{ x \in X : d(x, x_0) < r \}$$

Def. (3) Niech (X,d) – przestrzeń metryczna. Zbiór $A \subset X$ nazywamy ograniczonym $\iff \exists_{x_0 \in X} \exists_{r > 0}: A \subset K(x_0, r)$.

Def. (4) Topologią τ w zbiorze $X \neq \emptyset$ nazywamy dowolną rodzinę zbiorów $\{A_i\}$ $(i \in \{1,2,\dots,n\})$, gdzie $A_i \subset X$ spełniającą warunki

1° $\emptyset \in \tau \ \wedge \ X \in \tau$

2° $\left(\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}: A_i \in \tau\right) \Rightarrow \left(\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} A_i\right) \in \tau$

3° $\left(\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}: A_i \in \tau\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in \{1,\dots,n\}} A_i\right) \in \tau$

Zbiory należące do τ nazywamy otwartymi.

Def. (5) Niech (X, d) — przestrzeń metryczna. Zbiór $U \in X$ nazywamy *otwartym w (X,d)* $\iff$

$$U = \emptyset \quad \text{lub} \quad \forall_{x \in U} \exists_{r \in \mathbb{R}_+} : K(x, r) \subset U$$

Tw. (1) Niech (X,d) — przestrzeń metryczna. Wówczas

$\tau_d = \{ U \subset X : U - \text{otwarty w } (X,d) \}$ jest topologią

na zbiorze X (tzw. *topologia indukowana metryką d*)

Def. (6) Niech (X, τ_d) — przestrzeń topologiczna. *Wnętrzem* zbioru $A \subset X$ nazywamy zbiór $\operatorname{int} A$; największy (ze względu na relację inkluzji $\subset$) zbiór otwarty zawarty w A.

Def. (7) *Otoczeniem* punktu $x_0 \in X$ nazywamy dowolny zbiór otwarty zawierający punkt x_0. Przez $\mathcal{N}(x_0)$ oznaczamy zbiór wszystkich otoczeń punktu x_0.

Def. (8) ~~Niech~~ zbiór $B \subset X$ nazywamy *domkniętym* $\iff$ $X \setminus B$ jest zbiorem otwartym.

Def. (9) *Domknięciem* zbioru $A \subset X$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający A. Oznaczenie $\overline{A}$.

Def. (10) Punkt $x_0 \in X$ nazywamy *punktem brzegowym* zbioru $A \subset X$ $\iff$

$$\forall_{r>0} \; K(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \;\wedge\; K(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru A. Oznaczenie ∂A.

Det. (11) Punkt $x_0 \in X$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru $A \subset X \iff$

$$\forall r>0 \quad (K(x_0,r)\setminus\{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Tw. (2) A jest zbiorem domkniętym $\iff$ A zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.

Det. (12) Niech (X,d) — przestrzeń metryczna. Niech dany będzie ciąg (a_n): $\forall_{n\in\mathbb{N}}: a_n \in X$ i element $g \in X$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \overset{def}{\iff} \lim_{n\to\infty} d(a_n, g) = 0 .$$

Det. (13) Niech (X,d_1), (X,d_2) — przestrzenie metryczne. Metryki d_1, d_2 nazywamy *równoważnymi na X* $\iff$

$$\forall (x_n): \quad (x_n) \text{ zbieżny w } (X,d_1) \iff (x_n) \text{ zbieżny w } (X,d_2)$$

Det. (14) Metryki d_1, d_2 nazywamy *jednostajnie równoważnymi* na X $\iff$

$$\exists\, m>0, M>0: \forall x,y \in X: \ d_1(x,y) \le M d_2(x,y) \text{ i } d_2(x,y) \le m d_1(x,y)$$

Tw. (3) Jeśli d_1, d_2 są jednostajnie równoważne na X to są równoważne na X.

Det. (15) Ciąg (a_n) jest *ciągiem Cauchy'ego* w $(X,d) \iff$

$$\forall \varepsilon>0 : \exists_{N\in\mathbb{N}}: \forall n>N, m>N; n,m\in\mathbb{N}: \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Tw. (4) Każdy ciąg zbieżny w (X,d) jest ciągiem Cauchy'ego w (X,d).

Def. (16) Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy <u>zupełną</u> $\Leftrightarrow$ każdy ciąg Cauchy'ego elementów w tej przestrzeni jest zbieżny do granicy należącej do tej przestrzeni.

Def. (17) Niech (X,d) — przestrzeń metryczna. Zbiór $A \subset X$ nazywamy <u>zwartym</u> $\Leftrightarrow$

$\cancel{\forall (a_n),\, a_n \in A \ \exists\, a_k \in (a_n) : \lim_{k\to}}$

$$\forall (a_n),\, a_n \in A : \exists (a_{n_k}) : \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g \in A$$

<u>Przestrzenie unormowane</u>

Niech $(X, \mathbb{K}, +, \cdot)$ — przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{K}$.

Def. (18) Funkcję $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ nazywamy <u>normą</u> w $X \Leftrightarrow$

1° $\forall_{x\in X} : \|x\| > 0$

2° $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \forall_{x\in X} : \|\alpha\cdot x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (jednorodność normy)

3° $\forall_{x,y\in X} : \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (nierówność trójkąta)

4° $\forall_{x\in X} : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$

Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

Tw. (5) Każda unormowana przestrzeń jest metryczna. Natomiast metryka jest dana przez $d(x,y) = \|x-y\|$ (tzw. metryka indukowana przez normę).

Def. (19) Przestrzeń unormowaną i zupełną nazywamy __przestrzenią Banacha__.

Przestrzenie unitarne

Niech $(X, \mathbb{K}, +, \cdot)$ — przestrzeń wektorowa.

Def. (20) Funkcję $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{K}$ nazywamy __iloczynem skalarnym__ iff

1° $\forall_{x\in X}: \langle x | x \rangle \geqslant 0$

2° $\forall_{x,y\in X}: \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^*$

3° $\forall_{x,y,z\in X}: \langle (x+y) | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$

4° $\forall_{x,y\in X} \forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \langle \alpha x | y \rangle = \alpha^* \langle x | y \rangle$

5° $\forall_{x\in X}: \langle x | x \rangle = 0 \iff x = \bar{0}$

Parę $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ nazywamy __przestrzenią unitarną__.

Tw. (6) Każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną z normą $\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$ indukowaną przez iloczyn skalarny $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Def. (21) Przestrzeń unitarną i zupełną nazywamy __przestrzenią Hilberta__.

Rachunek różniczkowy w przestrzeniach Banacha.

Tw. () Banach fixed-point theorem

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha i zdefiniujmy odwzorowanie (tzw. zwężające) $f: X \mapsto X$ takie, że

$$\forall_{x,y \in X}: \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x-y\|$$

dla $\alpha \in (0;1)$. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt x_s taki, że $f(x_s) = x_s$ i dodatkowo

$$x_s = \lim_{n\to\infty} x_n \,,$$ gdzie ciąg (x_n) jest dany

rekurencyjnie $x_{n+1} = f(x_n)$ dla dowolnego $x_0 \in X$.

Niech U i V będą dwoma przestrzeniami Banacha. Przez $\mathcal{L}(U,V)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji

$f: U \mapsto V$.

Def. () Funkcję $f \in \mathcal{L}(U,V)$ nazywamy ograniczoną $\Leftrightarrow$

$$\exists_{M>0}: \forall_{x \in U}: \|f(x)\|_V \leq M \|x\|_U$$

Tw. () Banach bounded linear operator theorem

Odwzorowanie $f \in \mathcal{L}(U,V)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ograniczone.

- **Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych**

Rozważmy równanie różniczkowe na funkcję $y(x) : (a;b) \to \mathbb{R}$ postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

wtedy możemy scałkować $\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$.

- **Równania jednorodne**

Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Niech $u := \frac{y}{x}$, wówczas

$$\boxed{f(u) = \frac{d}{dx}(ux) = u + x\frac{du}{dx}}$$

Jest to równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych. Istotnie

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

- **Równania sprowadzalne do równań jednorodnych**

1° Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

Niech $u := ax + by + c$, wówczas

$$f(u) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{b}(u - ax - c)\right] = \frac{1}{b}\frac{du}{dx} - \frac{a}{b},$$ skąd

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = x$$

2° Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Jeśli $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ to mamy

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Niech $u := a_2x + b_2y$ wówczas

$$\boxed{b_2 f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) = \frac{du}{dx} - a_2}$$

Jeśli $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ to chcemy sprowadzić wyrażenie postaci $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ do ~~postaci~~ wyrażenia postaci $\frac{ax+by}{cx+dy}$.

Rozważmy podstawienie

$$x = \xi + k_1, \quad y = \eta + k_2$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1(\xi + k_1) + b_1(\eta + k_2) + c_1}{a_2(\xi + k_1) + b_2(\eta + k_2) + c_2} = \frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}$$

gdzie k_1, k_2 są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} a_1k_1 + b_1k_2 = -c_1 \\ a_2k_1 + b_2k_2 = -c_2 \end{cases} \longrightarrow \quad k_1 = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Po takim podstawieniu otrzymujemy równanie jednorodne

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1u}{a_2 + b_2u}\right) = f(u)$$

Istotnie $u = \frac{\eta}{\xi} \longrightarrow \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{\xi}\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{\eta}{\xi^2}$ skąd

$$f(u) = \xi\frac{du}{d\xi} + u$$

• <u>Równania różniczkowe liniowe 1-go rzędu</u>

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)$$

gdzie $p(x)$, $f(x)$ są danymi funkcjami nazywamy równaniem różniczkowym liniowym 1-go rzędu.

Dla $f(x) \not\equiv 0$ równanie takie nazywamy <u>równaniem niejednorodnym</u> (RN). Dla $f(x) \equiv 0$ równanie takie nazywamy <u>równaniem jednorodnym</u>

Ogólne rozwiązanie RJ ma postać

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\,y \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx$$

$$y(x) = A \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\}$$

gdzie A – pewna stała.

<u>Tw. ()</u> Rozwiązaniem ogólnym dowolnego liniowego równania różniczkowego niejednorodnego postaci

$$\hat{L} y = f(x) \quad \text{gdzie } \hat{L} \text{ jest operatorem liniowym}$$

jest sumą ogólnego rozwiązania $y_j(x)$ równania jednorodnego $\hat{L}y = 0$ i dowolnego szczególnego rozwiązania $y_s(x)$ równania niejednorodnego

$$y(x) = y_j(x) + y_s(x).$$

Metoda uzmienniania stałej

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe 1-go rzędu

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \qquad (*)$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest

$$y_0(x) = C \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\}$$

Poszukajmy rozwiązań (*) w postaci

$$y(x) = C(x) \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\}$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot \frac{dC}{dx} - p(x)\cancel{C(x)}\, e^{-\int p(x)dx} + p(x)\cancel{C(x)}\, e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$\frac{dC}{dx} = f(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

stąd $C(x) = \int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx$ więc funkcja

$$\boxed{y(x) = \left\{\int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx\right\} e^{-\int p(x)dx}}$$

jest ogólnym rozwiązaniem równania (*).

Tw.() całka ogólna liniowego równania różniczkowego n-tego rzędu zawiera n dowolnych stałych.

Tw.() całką szczególną liniowego RR postaci

$$\hat{L}y(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

jest funkcja $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ gdzie y_1, y_2 — całki szczególne RR

$$\hat{L}y = f_1(x), \quad \hat{L}y = f_2(x).$$

• <u>Równanie różniczkowe Bernoulliego</u>

Równaniem różniczkowym Bernoulliego nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\, y + q(x)\, y^{r}$$

dla danych funkcji $p(x), q(x)$ i danej liczby rzeczywistej $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

RR Bernoulliego można sprowadzić do równania liniowego przez podstawienie

$$u = y^{1-r} \longrightarrow \frac{du}{dx} = (1-r)\, y^{-r} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{r}}{1-r} \frac{du}{dx} = p(x)\, y + q(x)\, y^{r}$$

$$\frac{du}{dx} = (1-r)\, p(x)\, y^{1-r} + (1-r)\, q(x) =$$

$$= (1-r)\, p(x)\, u + (1-r)\, q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + p'(x)\, u = f(x)$$

gdzie $\quad p'(x) = (r-1)\, p(x) \quad , \quad f(x) = (1-r)\, q(x)$.

• <u>Równanie różniczkowe Riccatiego</u>

Równaniem różniczkowym Riccatiego nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\, y^{2} + b(x)\, y + c(x) \qquad (*)$$

Niech $y_0(x)$ będzie całką szczególną $(*)$.
Niech $u := y - y_0 \longrightarrow y = u + y_0$

Wówczas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dy_0}{dx} = a(x)\,(u+y_0)^2 + b(x)\,(u+y_0) + c(x)$$

$$\frac{du}{dx} + \cancel{\frac{dy_0}{dx}} = a(x)\left(u^2 + \cancel{y_0^2} + 2uy_0\right) + b(x)\,(u + \cancel{y_0}) + \cancel{c(x)}$$

$$\frac{du}{dx} = a(x)\,u^2 + \left(b(x) + 2y_0\,a(x)\right)u$$

czyli otrzymujemy równanie różniczkowe Bernoulliego.

• <u>Równanie różniczkowe zupełne</u>

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

można zapisać w postaci

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (*)$$

Równanie różniczkowe (*) nazywamy <u>zupełnym</u> iff istnieje funkcja $U(x,y)$ potencjału taka, że

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (**)$$

wtedy (*) jest równoważne

$$dU = 0 \;\rightarrow\; U(x,y) = \text{const.}$$

zatem rozwiązaniem jest krzywa ekwipotencjalna pola o potencjale $U(x,y)$

Wiadomo, że funkcja $U(x,y)$ spełniająca (**) istnieje iff $\forall_{(x,y)\in D}$ gdzie D — obszar jednospójny; zachodzi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Wówczas $U(x,y)$ jest równa (z dokładnością do stałej) całce krzywoliniowej

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [P,Q]\cdot[dx,dy] \qquad (*)$$

po <u>dowolnej</u> krzywej l łączącej punkty (x_0,y_0), (x,y).

Wzór (*) określa całkę ogólną RR zupełnego, a ponadto przez każdy punkt (x_0,y_0) przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa $y(x)$ będąca rozwiązaniem RR zupełnego.

<u>czynnik całkujący</u>

Załóżmy, że RR postaci

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

nie jest równaniem zupełnym. Rozważmy funkcję $\mu(x,y)$ i rozważmy RR

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0 \qquad (*)$$

Jeśli równanie (*) jest równaniem zupełnym to funkcję $\mu(x,y)$ nazywamy <u>czynnikiem całkującym</u>.

Poszukiwanie funkcji $\mu(x,y)$ jest na ogół trudne. Załóżmy więc dla uproszczenia $\mu(x,y)=\mu(x)$. Wówczas warunek na potencjalność pola $\mu[P,Q]$ ma postać

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \mu\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \;\longrightarrow\; \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + Q\frac{d\mu}{dx} = 0$$

skąd $\displaystyle\int\frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx$

$$\mu(x) = C\exp\left\{-\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\right\}$$

co wyraża wzór na czynnik całkujący zależny jedynie od zmiennej x.

• **Równanie różniczkowe Lagrange'a**

Będziemy korzystać z notacji Newtona $\dot{y} := \frac{dy}{dx}$.

Równaniem różniczkowym Lagrange'a nazywamy równanie postaci

$$y = \varphi(\dot{y})x + \psi(\dot{y})$$

dla pewnych zadanych funkcji φ, ψ. Różniczkując obustronnie po x otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(\dot{y}) + x\ddot{y}\frac{d\varphi}{d\dot{y}} + \ddot{y}\frac{d\psi}{d\dot{y}} = \varphi(\dot{y}) + \left\{x\frac{d\varphi}{d\dot{y}} + \frac{d\psi}{d\dot{y}}\right\}\ddot{y}$$

$$\dot{y} = \varphi(\dot{y}) + \left\{x\frac{d\varphi}{d\dot{y}} + \frac{d\psi}{d\dot{y}}\right\}\frac{d\dot{y}}{dx}$$

Równanie to możemy przekształcić do RR na funkcję

$f = x(\dot{y})$

$$(\dot{y} - \varphi(\dot{y}))\frac{df}{d\dot{y}} = f\frac{d\varphi}{d\dot{y}} + \frac{d\psi}{d\dot{y}}$$

czyli podstawiając $\eta := \dot{y}$

$$(\eta - \varphi(\eta))\frac{df}{d\eta} = f\frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{d\psi}{d\eta}$$

Otrzymujemy więc niejednorodne równanie liniowe 1-go rzędu. Niech $\omega(\dot{y})$ będzie rozwiązaniem tego równania - wówczas mamy

$$\begin{cases} x = \omega(\dot{y}) \\ y = \varphi(\dot{y})\,\omega(\dot{y}) + \psi(\dot{y}) \end{cases}$$

Ten układ równań opisuje <u>parametrycznie</u> całkę ogólną równania Lagrange'a.

- <u>Równanie różniczkowe Clairauta</u>

Równaniem różniczkowym Clairauta nazywamy RR Lagrange'a dla przypadku

$$\varphi(\dot{y}) = \dot{y}$$

- <u>Równania różniczkowe liniowe 2-go rzędu</u>

Będziemy rozpatrywać równania różniczkowe postaci

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = f(x)$$

dla zadanych funkcji $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$.

→ <u>Równanie jednorodne o stałych współczynnikach</u>

Rozpatrujmy równanie postaci

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\beta\frac{dy}{dx} + \omega_0^2 y = 0 \qquad (*)$$

Rozwiązaniem równania $(*)$ jest

1° dla $\omega_0 > \beta$: $y(x) = A e^{-\beta x}\cos(\omega x + \delta)$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, A, δ — stałe

2° dla $\omega_0 < \beta$: $\quad y(x) = e^{-\beta x}\left\{ C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} \right\}$

3° dla $\omega_0 = \beta$: $\quad y(x) = (B_1 + B_2 x)\, e^{-\beta x}$

• Równanie różniczkowe Eulera 2-go rzędu

Równanie postaci

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + p x \frac{dy}{dx} + q y = 0 \qquad (*)$$

gdzie p, q to dane liczby; nazywamy równaniem Eulera 2-go rzędu.

Niech $\boxed{x = e^t}$, wtedy

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cancel{\frac{1}{x}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} \\ p x \dfrac{dy}{dx} = p \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

zatem równanie (*) przyjmuje postać

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = 0$$

czyli RR liniowe 2-go rzędu jednorodne o stałych współczynnikach.

• $F(y, y', y'') = 0$. Niech $p := y'$ i $p = p(y)$ wówczas

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy} \;\longrightarrow\; \text{otrzymujemy rr 1-go rzędu}$$

$$F[y, p(y), p\,p'(y)] = 0$$

TEORIA DYSTRYBUCJI

<u>Def.()</u> Nośnikiem funkcji $\varphi(x)$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}}$$

<u>Def.()</u> <u>Dystrybucją regularną</u> wyznaczoną przez lokalnie całkowalną funkcję f nazywamy

$$\langle f | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt$$

dla pewnego $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

Wiele własności dystrybucji i pojęć z nimi związanych wprowadza się w taki sposób, by były one uogólnieniem własności dystrybucji regularnych.

<u>Def.()</u> Pochodną dystrybucji T nazywamy dystrybucję $T' = DT$ określoną wzorem

$$\langle T' | \varphi \rangle = - \langle T | \varphi' \rangle$$

dla $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. W ten sposób każda dystrybucja, a więc i każda funkcja lokalnie całkowalna ma pochodną. Pochodną tą nazywamy <u>pochodną w sensie dystrybucyjnym</u>.

- W przypadku wielowymiarowym

$$\langle D^{\alpha} T | \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T | D^{\alpha}\varphi \rangle$$

gdzie $D^{\alpha}\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi$ i $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Def. () Mówimy, że dystrybucje T_1, T_2 są równe na zbiorze otwartym $A \subset \mathbb{R}$ iff

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \varphi \subset A \implies \langle T_1 | \varphi \rangle = \langle T_2 | \varphi \rangle$$

Def. () Dystrybucję T nazywamy dystrybucją skończonego rzędu iff istnieje funkcja $h(t)$ ciągła w $\mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$T = D^k h \qquad \langle T | \varphi \rangle = \langle D^k h | \varphi \rangle$$

Przykład Rozważmy funkcję ciągłą $h(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; 0] \\ x & \text{dla } x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

Obliczmy dwie pierwsze pochodne dystrybucyjne funkcji $h(t)$

$$\langle Dh | \varphi \rangle = -\langle h | D\varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, \varphi'(t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{+\infty} t\, \varphi'(t)\, dt = -t\varphi(t)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \langle \theta | \varphi \rangle$$

gdzie $\theta(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 1 & x \in (0; +\infty) \end{cases}$ to tzw. funkcja

~~skok~~ skokowa Heaviside'a.

$$\langle D^2 h | \varphi \rangle = \langle h | \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, \varphi''(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} t\, \varphi''(t)\, dt = t\varphi'(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \varphi(0) - \varphi(+\infty) = \varphi(0) = \langle \delta | \varphi \rangle$$

gdzie δ to tzw. delta Diraca. Zauważmy, że δ jest dystrybucją nieregularną rzędu 2.
(Dystrybucja regularna to dystrybucja generowana przez $f \in L_{loc}[\Omega]$

Def. () • Przez $L^p[\Omega]$ będziemy oznaczać zbiór funkcji takich, że

$$L^p[\Omega] := \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{C} \;\middle|\; \int_\Omega |f|^p \, d\tau < +\infty \right\}$$

Najczęściej interesuje nas $L^2[\mathbb{R}]$, $L^2[\mathbb{R}^2]$, $L^2[\mathbb{R}^3]$.

• Przez $W^{n,p}[\Omega]$ będziemy oznaczać zbiór funkcji takich, że

$$W^{n,p}[\Omega] := \left\{ f \in L^p[\Omega] \;\middle|\; \forall_{|\alpha| \le n} : \partial^\alpha f \in L^p[\Omega] \right\}$$

gdzie α jest pewnym wielowskaźnikiem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

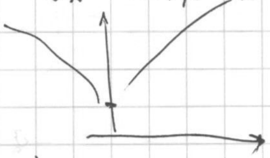
$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_k^{\alpha_k}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k. \quad \text{(w sensie dystrybucyjnym)}$$

• Dla $p = 2$ będziemy stosować oznaczenie $H^n[\Omega] := W^{n,2}[\Omega]$

$(\nabla \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ $\phi(x,y)$ $\quad \psi = (x,y)$

$\frac{\partial E_y}{\partial x} = f(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \phi$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin(x+y) \frac{\partial \psi}{\partial x}$



$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \dots$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x+y) \psi) - \psi \cos(x+y)$

$\phi = \int \sin(x+y) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$

$= \sin(x+y) \psi - \int \psi \cos(x+y) \, dx$

$\int (\operatorname{div} \vec{E}) \, d\tau = \int_{\partial\tau} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\partial\tau} E_x dx + E_y dy$

$\int \quad E_y = f(x,y) \phi$

$\vec{E} = \phi(x,y) \hat{x}$

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

$\int_\Omega (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = f(x,y)$

$E_x = \phi(x,y)$

$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \phi(x,y) \hat{x} \cdot d\vec{S}$

$\lim_{a \to 0} a(\ln a - 1)$

$= \lim_{a \to 0^+} \frac{\ln a - 1}{1/a} = \lim_{a \to 0^+} \frac{1/a}{1/a^2} = \lim_{a \to 0^+} a = 0$

$\int t e^t \, dt$ $\quad \ln x = t$

$\int t (e^t)' dt = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin(x+y) \frac{\partial \psi}{\partial x}$

Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych

1. Metoda Różnic Skończonych (MRS)

Z rozwinięcia Taylora funkcji w otoczeniu punktu x mamy

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{f'(x)}{1!} h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \ldots$$

$$f(x-h) \approx f(x) - \frac{f'(x)}{1!} h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 - \ldots \qquad (*)$$

skąd $\quad f(x+h) - f(x-h) \approx 2 f'(x) h + O(h^3)$

Otrzymujemy zatem wzór przybliżony na 1. pochodną

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}$$

(tzw. <u>różnica centralna</u>)

Analogicznie z $(*)$ mamy

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2f(x) + \frac{2f''(x)}{2} h^2 + O(h^4)$$

$$\boxed{f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}$$

Analogiczne przybliżenia przez skończone różnice możemy wykonać dla pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych.

Ideą MRS jest pokrycie obszaru D na którym rozważamy dane tzw. kratą o ustalonej szerokości h elementu i przybliżenie w każdym punkcie kratowym tzw. przez odpowiednie równanie różnicowe. Prowadzi to do układu równań, który można rozwiązać na komputerze.

2. Metoda elementów skończonych (MES)

Sformułowanie słabe

Rozważmy rr w przedziale $D = [0;1]$ postaci

$$u''(x) = f(x) \qquad (*)$$

dla pewnej funkcji f gi warunków brzegowych $u(0) = u(1) = 0$. Jeśli pewna funkcja $u(x)$ spełnia $(*)$ dla danych warunków brzegowych to:

$$\forall_{v \in C^0[0;1]} : \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx \qquad (**)$$

Zachodzi również twierdzenie odwrotne: jeśli dana funkcja $u(x)$: $u(0) = u(1) = 0$ spełnia $(**)$ to $u(x)$ spełnia $(*)$.

Zauważmy, że w takim razie

$$\int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx = u'(x)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx$$

$$= - \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx .$$

zakładając $v(0) = v(1) = 0$

Wielkość $\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \phi(u,v)$ nazywamy mapą.

[$v(x)$ powinny mieć analogiczne warunki Dirichleta na brzegu]

Shift warunku brzegowego Dirichleta

Załóżmy, że mamy warunek Dirichleta postaci $u(0) = a$, $u(1) = b$. Wówczas możemy napisać

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \left[(b-a)x + a \right]$$

przy czym $\tilde{u}(x)$ spełnia warunek brzegowy $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0$,

Dyskretyzacja

Załóżmy, że sformułowaliśmy problem brzegowy w postaci słabej

$$\forall_{v \in V}: \quad B(u,v) = L(v)$$

gdzie $L(v)$ może być np. postaci $L(v) = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$

ideą dyskretyzacji jest wzięcie skończenie wymiarowej przestrzeni $V_n \subset V$: $V_n = Lin\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i przybliżenie poszukiwanego rozwiązania $u(x)$ przez

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i(x)$$

W przykładzie (**) mielibyśmy więc

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}: \quad \int_0^1 f(x)\,v_i(x)\,dx = -\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j'(x)\right) v_i'(x)\,dx$$

czyli otrzymujemy układ równań na współczynniki α_i

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_0^1 v_j'(x)\,v_1'(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,v_1(x)\,dx \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_0^1 v_j'(x)\,v_n'(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,v_n(x)\,dx \end{array} \right.$$

Przybliżonym rozwiązaniem jest wówczas

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i(x)$$

Postać słaba niejako automatycznie uwzględnia warunki brzegowe Neumanna / Robina (tzw. naturalne warunki brzegowe) natomiast na funkcję $u(x)$ należy osobno nałożyć warunki Dirichleta (o ile takie występują).